JSST Journal of Space Sience and Technology

Vol. 15 / Issue 1 / 2022 / (No. 50)
Print ISSN: 2008-4560 / Online ISSN: 2423-4516
https://doi.org/10.30699/jsst.2022.1363

OPEN ACCESS

Pages: 1-20 / Research Paper / Received: 06 August 2021 / Revised: 26 November 2021 / Accepted: 27 December 2021

Journal Homepage: https://jsst.ias.ir

Free Vibration Analysis of Grid Stiffened Doubly Curved Composite Shells Using a Refined Higher Order Theory

Reza Kohandani[1], Ali Davar[2*], Mohsen Heydari Beni[3], Jafar Eskandari Jam[4] and Majid Eskandari Shahraki[5]

1. M.Sc. Student, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology,Tehran, Iran

2. Assistant professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

3. Ph.D. Student, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

4. Professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

5. Ph.D. Student, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*Corresponding Author's E-mail: dvar78@gmail.com

Abstract

In this research the free vibration analysis of simply supported grid stiffened doubly curved shells by using a refined higher order theory is presented. The advantage of the present theory in comparison with other higher order theories is investigation of the effects of trapezoidal shape factor in the stress resultants in order to obtain more accurate frequency results. The governing equations of motion and boundary conditions are obtained using Hamilton's principle and solved by using the Galerkin method. In the case of grid stiffened shells, a distribution function is introduced for describing the physical discontinuity between the ribs and the bays. The results are validated by making comparison to those existed in the literature or those obtained using the present numerical simulation in ABAQUS/Standard solver. In most cases, validations illustrated excellent agreement between the results. Finally, the effects of geometrical properties, material property and layup on the frequency responses of the shell are discussed.

Keywords: Free vibration, Doubly curved shells, Composite, Grid stiffened structure, Higher order shell theory, Trapezoidal shape factor

How to cite this article:
R. Kohandani, A. Davar, M. Heydari Beni, J. Eskandari Jam and M. Eskandari Shahraki, "Free Vibration Analysis of Grid Stiffened Doubly Curved Composite Shells Using a Refined Higher Order Theory," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-20, 2022 (in Persian), https://doi.org/10.30699/jsst.2022.1363.

JSST
علوم و فناوری فضایی
دوره ۱۵ / شماره ۱ / ۱۴۰۱ / (پیاپی ۵۰)
شاپای چاپی: ۴۵۶۰-۲۰۰۸ / شاپای الکترونیکی: ۴۵۱۶-۲۴۲۳
https://doi.org/10.30699/jsst.2022.1363
OPEN ACCESS
ص. ص. ۲۰-۱ / مقاله علمی- پژوهشی / دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۱۵ / بازنگری: ۱۴۰۰/۰۹/۰۵ / پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۰۶
Journal Homepage: https://jsst.ias.ir

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مشبک کامپوزیتی دو انحنایی با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای تعمیم یافته

رضا کهندانی[۱]، علی داور[۲*]، محسن حیدری بنی[۳]، جعفر اسکندری جم[۴]، مجید اسکندری شهرکی[۵]

۱، ۲، ۳ و ۴- مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران
۵- دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

*ایمیل نویسنده مخاطب: davar78@gmail.com

چکیده

در این مقاله به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مشبک کامپوزیتی دو انحنایی با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای اصلاح‌شده، تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداخته شده است. مزیت تئوری حاضر نسبت به دیگر تئوری‌های مرتبه بالا، احتساب اثر عبارت ضریب شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته در روابط میدان جابه‌جایی و کرنش است که سبب افزایش دقت نتایج می‌گردد. معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم بر مسئله به کمک اصل هامیلتون استخراج شده و به کمک روش گالرکین حل می‌شود. در پوسته‌های مشبک، توزیع ناپیوسته سفتی و جرم پوسته در ریب‌های تقویت‌کننده و مواد پرکننده فضای بین ریب‌ها به کمک تابع توزیع مناسب بیان شده است. اعتبارسنجی این پژوهش، با نتایج تحقیقات سایر محققین یا نتایج حل عددی به‌دست‌آمده به کمک نرم‌افزار آباکوس صورت گرفته است، در اکثر موارد، انطباق عالی بین نتایج تئوری حاضر و نتایج منابع دیگر حاصل شده است. درنهایت، مطالعه پارامتری صورت پذیرفته است که در آن اثر تغییر در پارامترهای مختلف هندسی، جنس ماده و نوع لایه‌چینی در پوسته‌های ایزوتروپیک و کامپوزیتی موردبررسی واقع شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته‌های دو انحنایی، کامپوزیت، سازه مشبک، تئوری مرتبه بالای پوسته، عبارت شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته

علائم و اختصارات

شعاع‌های متوسط پوسته دو انحنایی	R_y, R_x, r_y, r_x
ضخامت پوسته	h
طول و عرض پوسته	a, b
متغیرهای جابه‌جایی‌های درون صفحه	v_0، u_0
متغیر جابه‌جایی خارج از صفحه	w_0
چرخش‌های خط عمود بر سطح میانی	θ_y, θ_x
تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی	FSDT
تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی	HOST
اثر ترم ذوزنقه‌ای	γ_0
شماره لایه چندلایه	k
زاویه چرخش الیاف	θ
منتجه‌های تنش	$\bar{\sigma}$
مؤلفه‌های کرنش	$\bar{\varepsilon}$
ضریب تصحیح برشی	K_0
ماتریس سفتی	D
انرژی کرنشی	U
انرژی جنبشی	K
کار ناشی از نیروهای خارجی	W
عملگر دیفرانسیلی	L_{ij}
سفتی کل	$Q_{ij}(x,y)$
سفتی ریب‌ها	Q_{ij}^{rib}
سفتی مواد پرکننده	Q_{ij}^{bay}
تابع توزیع	$HP(x,y)$

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد
۲. استادیار
۳. دانشجوی دکتری
۴. استاد
۵. دانشجوی دکتری

سفتی ریب‌های در جهت f	Q_{ij}^{ϕ}
تابع توزیع ریب‌های در جهت f	HP^{ϕ}
مدول یانگ	E
مدول برشی	G
ضریب پواسون	ν
تئوری ارائه شده در پژوهش حاضر	RHOST12, HOST12
تئوری مرجع [۱۹]	PSDT
مؤلفه جابه‌جایی در جهت x	u(x,y,z,t)
مؤلفه جابه‌جایی در جهت y	v(x,y,z,t)
مؤلفه جابه‌جایی در جهت z	w(x,y,z,t)
تعداد خانه‌های مشبک	m_x, n_y

مقدمه

با پیشرفت علم مواد و فناوری تولید، مواد کامپوزیتی به‌سرعت توسعه یافتند و به سبب ویژگی‌های بدیع خود نظیر استحکام و سفتی ویژه، ضد خوردگی و دارا بودن قابلیت طراحی و غیره در بسیاری موارد می‌تواند جایگزین مناسبی برای مواد مرسوم نظیر فولاد و بتن باشد. در بین این مواد، سازه‌های کامپوزیتی با تقویت‌کننده‌های مشبک به جهت کارایی بالای سازه‌ای و هزینه پایین، مورد مطالعه بسیاری از پژوهشگران واقع شدند و از قرن نوزدهم میلادی به بعد، استفاده از سازه‌های مشبک باهدف افزایش استحکام در مهندسی گسترش یافت. ازجمله کاربردهای این سازه‌ها استفاده در هواپیماها، پوسته کشتی‌ها، خودروها، سکوهای نفتی، پل‌ها، ادوات نظامی و غیره است.

مطالعه پیرامون رفتار استاتیکی، دینامیکی و پایداری سازه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های مختلف با توجه به موارد کاربرد وسیع آنها، از اهمیت بالایی برخوردار است. به‌ویژه تحلیل ارتعاشی این‌گونه سازه‌ها به‌منظور جلوگیری از تخریب ناشی از پدیده تشدید و همچنین شناسایی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مختلف در سازه ضروری به نظر می‌رسد. در همین راستا بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌ها توسط بسیاری از پژوهشگران موردتوجه قرار گرفته است و بدین منظور از روش‌های تحلیلی، عددی و تجربی متعددی بهره گرفته شده است. در بین روش‌های تحلیلی، تئوری‌های مرتبه بالا برای تحلیل پوسته‌های ضخیم و ازجمله پوسته‌های کامپوزیتی مورد استفاده بوده و نتایج دقیق‌تری نسبت به دیگر تئوری‌ها در این نوع سازه‌ها به‌دست آمده است. در انواع مشبک پوسته‌های کامپوزیتی پیشرفته، به سبب ماهیت هندسی آن‌ها، پیچیدگی تحلیل بیشتر از پوسته‌های کامپوزیتی معمولی است. همچنین پوسته‌های دو انحنایی در مقایسه با پوسته‌های تک انحنا مانند استوانه، حالتی عمومی‌تر دارند که با استفاده از نتایج تحلیل آن‌ها و بهره‌گیری از فرمولاسیون استخراج شده، می‌توان به تحلیل هندسه‌های تک انحنایی نیز پرداخت.

امیدواران[6] در سال‌های ۱۹۷۱ و ۱۹۷۳ روش حلی را برای تعیین فرکانس‌های پایای ارتعاشات یک ورق با تقویت‌کننده مشبک و تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده را ارائه داده است. او خواص مشبک را در جهت‌های عمود بر هم متفاوت در نظر گرفت و از رویکرد ماکرومکانیک برای رسیدن به نتیجه بهره برده است [۱، ۲].

خاره[7] و همکاران، در سال ۲۰۰۵، با استفاده از دو تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی، به تحلیل ترمومکانیکی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های ضخیم دو انحنایی ساندویچی با لایه‌چینی متقاطع، تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداخته‌اند. یکی از این تئوری‌ها هم اثر تنش‌ها و کرنش‌های برشی عرضی و هم اثر تنش‌ها و کرنش‌های عمودی را در نظر می‌گرفت، در حالی که تئوری دیگر تنها اثر تغییر شکل برشی عرض را محاسبه می‌کرد. نتایج تحلیل، با حل‌های دقیق الاستیسیته سه‌بعدی و حل‌های فرم بسته ارائه شده در مقاله، مقایسه شده و حاکی از نزدیک بودن نتایج حاصله به پاسخ‌های دقیق بوده است [۳].

در سال ۲۰۰۶، تورانی و لاکیس[8] به بررسی نیمه‌تحلیلی پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه و نامتقارن پرداختند. در این تحقیق، اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی لحاظ گردیده است. روش مورد استفاده، ترکیبی از روش اجزای محدود هیبریدی و تئوری پوسته همراه با کرنش‌های برشی عرضی است. نتایج حاصله با دیگر نتایج موجود تطابق خوبی داشت [۴].

کاندو و هان[9] در سال ۲۰۰۹، به بررسی مشخصه‌های ارتعاشی پیش کمانش و پس کمانش پوسته‌های دو انحنایی کامپوزیتی پرداخته‌اند. به سبب تغییر در شرایط محیطی، تنش‌های حرارتی- رطوبتی پس‌ماند، ممکن است باعث ایجاد کمانش و ناپایداری دینامیکی در این سازه‌ها شوند. در این تحلیل از روش اجزای محدود استفاده شده است و نتایج عددی مثال‌های غیرخطی و فرکانس‌های اصلی همراه با شکل خمش‌ها و شکل مودها ارائه و بحث شده است. نتایج آنها نشان داد که با کاهش ضخامت، نقطه اوج کمانش کاهش می‌یابد، فرکانس اصلی در پیش‌کمانش کاهش و در پس‌کمانش افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش شعاع انحنای فرکانس اصلی کاهش می‌یابد. در اثر بارگذاری حرارتی، پدیده تغییر جهت در انحناء برای پانل‌های استوانه‌ای مشاهده می‌گردد. رفتار خمشی غیرخطی هندسی، مشخصه‌های ارتعاشی را در محیط‌های حرارتی- رطوبتی تحت تأثیر قرار می‌دهد [۵].

6. Omid'Varan
7. Khare
8. Toorani& Lakis
9. Kundu & Han

چرفی و همات[10] در ۲۰۱۰، ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های کم‌عمق با شکل قالب بیضوی و با دو انحناء که از مواد با خواص تدریجی هدفمند ساخته شده باشند را با نسخه پی[11] از روش اجزاء محدود و معطوف به روش ترکیبی موردبررسی قرار داده‌اند. در محاسبات آن‌ها اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی چرخشی و غیرخطی‌های هندسی به کار رفته است. برای استخراج معادلات حرکت آزاد، از روش تعادل هارمونیک بهره گرفته شده است. معادلات برآیند غیرخطی، با تکرار و از روش حالت خطی به دست آمده و مطالعه بر همگرایی جواب و مناسب‌بودن آن انجام گرفته است. در ضمن اثر نمایی کسر حجمی و نسبت ضخامت بر فرکانس‌های خطی و غیرخطی، مورد بحث واقع شده و نشان از تأثیر این پارامترها بر رفتار سخت‌شدن دارد [۶].

صیاد در سال ۲۰۱۰ به تحلیل اثر برش بین لایه‌ای شبکه بر روی کمانش موضعی استوانه مشبک کامپوزیتی پلیمری تحت بارمحوری فشاری یکنواخت پرداخت [۷].

مانتاری و سوارس[12] در سال ۲۰۱۲، یک تئوری تعمیم‌یافته پنج درجه آزادی مرتبه بالای تغییر شکل برشی را به‌منظور تحلیل مطالعه ارتعاشات آزاد و خمش پوسته‌ها و ورق‌ها ارائه کردند که ممکن است برای ایجاد تئوری‌های مرتبه بالای دیگر از آن استفاده شود. معادلات حاکم و شرایط مرزی فرمولاسیون تعمیم‌یافته با استفاده از اصل کار مجازی به‌دست آمده است و برای حل از روش ناویر استفاده شده است. نتایج حاصل از این تئوری با نتایج تئوری سه‌بعدی الاستیسیته مقایسه شده است و دقت بیشتری را نسبت به دیگر تئوری‌های از این دست، نشان داده است [۸].

عدالت[13] و همکاران در سال ۲۰۱۳ به تحلیل ارتعاشات آزاد و پاسخ‌های دینامیکی پوسته تقویت‌شده با انحناهای سهمی‌گون پرداختند. آن‌ها برای این کار از روش انرژی برای تعیین پارامترهای ارتوتروپیک معادل پوسته استفاده کرده‌اند [۹].

در سال ۲۰۲۰ زارعی و همکارانش خصوصیات ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیت تقویت شده با گرید را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین تأثیر پارامترهای هندسی پوسته و تغییرات زاویه ریب‌های متقاطع بر فرکانس‌های طبیعی مورد بحث و بررسی قرار گرفت [۲۰].

در سال ۲۰۲۱ لیو و همکارانش یک روش اجزا محدود جدید بر اساس نظریه میندلین برای پوسته‌های کامپوزیت چند لایه با دو منحنی ارائه کردند و نتایج عددی خمش خطی استاتیکی، ارتعاش پویا و خمش غیرخطی صفحه تخت، پوسته استوانه‌ای و پوسته چندلایه با دو منحنی با نتایج موجود در مقالات و شبیه‌سازی در نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شد [۲۱].

هدف از این مقاله، به‌کارگیری مدلی تعمیم‌یافته برای سازه‌های مشبک مختلف متقارن، بدون استفاده از یک مدل معادل است. در تحلیل تئوری، یک تابع توزیع[14] تعریف می‌شود که تمام حالات فیزیکی پوسته مشبک را به‌طور دقیق توصیف می‌کند. سپس با در نظرگیری مفروضات اصلی تئوری کلاسیک صفحات[15] و معادلات پوسته‌ها، معادلات اصلی پوسته مشبک به دست می‌آید.

حل مسئله ارتعاشات پوسته‌های دو انحنایی کامپوزیتی و مشبک

برخی از محققان با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی پرداخته‌اند؛ اما استفاده از تئوری فوق برای پوسته ارتوتروپیک حجم محاسبات زیادی داشته و تحلیل مسئله بسیار پیچیده می‌شود. به همین دلیل تاکنون اکثر محققان با بهره‌گیری از تئوری‌های مرتبه بالای دوبعدی، پوسته‌ها را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند.

کتو در سال ۱۹۹۹ نشان داد که میدان جابه‌جایی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، با در نظرگرفتن ترم ذوزنقه‌ای و محاسبه منتجه‌های تنش با انتگرال‌گیری به روش دقیق، حتی در مورد پوسته‌های ضخیم، دقت بسیار خوبی در تحلیل دینامیکی دارد. او همچنین نشان داد که این تئوری مرتبه اول در مقایسه با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای ردی که این ترم را در محاسبات خود لحاظ نکرده است، به نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد به‌دست آمده با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بیمارادی برای پوسته‌های ضخیم نزدیک‌تر است [۲۲].

در شکل (۱)، گسترده المان مقطع پوسته نشان داده شده است و همان‌طورکه مشاهده می‌شود با درنظرگرفتن ضریب شکل ذوزنقه‌ای، شکل مستطیل گسترده به‌صورت ذوزنقه درنظرگرفته می‌شود که به واقعیت نزدیک‌تر بوده و به همین دلیل دقت پاسخ‌ها را بالا می‌برد.

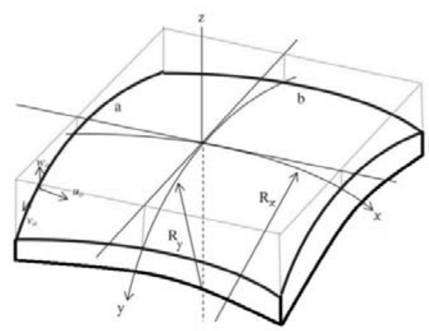
شکل ۱– المان مقطع پوسته گسترده شده و در نظر گرفتن شکل واقعی ذوزنقه به‌جای شکل مستطیل

10. Chorfi & Houmat
11. P version
12. Mantari& Soares
13. Edalata
14. Distribution function
15. Classical Laminated Plate theory

در این بخش از پژوهش، با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای تعمیم‌یافته که در آن اثر ترم ذوزنقه‌ای (1 + z/R) در نظر گرفته شده است، بر پایه اصل هامیلتون به استخراج معادلات حاکم و سپس به کمک روش گالرکین به حل آن پرداخته شده است. در مورد پوسته‌های مشبک نیز با استفاده از یک تابع پله‌ای به‌منظور بیان چگونگی وضعیت فیزیکی سازه، پس از استخراج معادلات و حل آن، ماتریس جرم و سفتی تعیین شده‌اند.

تعیین مؤلفه‌های جابه‌جایی

شکل (۲) یک پوسته دو انحنایی را با شعاع‌های متوسط R_x و R_y، ضخامت h و ابعاد a×b را به همراه مختصات مرجع در دستگاه مختصات دو انحنایی (x,y,z) نشان می‌دهد.



شکل ۲- پوستهٔ دو انحنایی (برگرفته از [۱۰])

در این بخش بسط سری تیلور برای توسعه یک فرمولاسیون دوبعدی از یک مسئله الاستیسیته سه‌بعدی مورد استفاده واقع شده است. روابط زیر با بسط مؤلفه‌های جابه‌جایی u(x,y,z,t)، v(x,y,z,t) و w(x,y,z,t) به ترتیب در سه جهت x، y و z در هر نقطه از فضای چندلایه برحسب مختصه ضخامت (z) به‌دست آمده‌اند [۱۱، ۱۲].

$$\begin{aligned}&(x,y,z,t) = (1+\gamma_0 z/r_x)u_0(x,y,t) + \\ &z\theta_x(x,y,t) + z^2u_0^*(x,y,t) + z^3\theta_x^*(x,y,t)\\ &v(x,y,z,t) = (1+\gamma_0 z/r_y)v_0(x,y,t) + \\ &z\theta_y(x,y,t) + uz^2v_0^*(x,y,t) + z^3\theta_y^*(x,y,t)\\ &w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + z\theta_z(x,y,t)\\ &+z^2w_0^*(x,y,t) + z^3\theta_z^*(x,y,t)\end{aligned} \qquad (۱)$$

u_0 و v_0 متغیرها و جابه‌جایی‌های درون صفحه w_0 و جابه‌جایی خارج از صفحهٔ یک نقطه دلخواه (x,y) بر روی سطح میانی چندلایه است و توابع θ_x و θ_y نمایانگر چرخش‌های خط عمود بر سطح میانی حول محورهای x و y است بقیه متغیرها عبارت‌های مرتبه بالا در بسط تیلور بوده و نماینده مودهای تغییر شکل عرضی مقطع پوسته هستند و به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned}&\theta_x = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}, u_0^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{z=0}, \theta_x^* = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\Big|_{z=0}\\ &\theta_y = \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0}, v_0^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big|_{z=0}, \theta_y^* = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}\Big|_{z=0}\\ &\theta_z = \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0}, w_0^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big|_{z=0}, \theta_z^* = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\Big|_{z=0}\end{aligned} \qquad (۲)$$

در رابطه کلی زیر با توجه به تغییرات ضرایب موجود تئوری‌های مختلفی حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&u = (1+\frac{\gamma_0 z}{r_x})u_0 + z\theta_x + C_3z^2u_0^* + C_4z^3\theta_x^*\\ &v = (1+\frac{\gamma_0 z}{r_y})v_0 + z\theta_y + C_3z^2v_0^* + C_4z^3\theta_y^*\\ &w = w_0 + C_1z\theta_z + C_1z^2w_0^* + C_2z^3\theta_z^*\end{aligned} \qquad (۳)$$

در رابطه (۳) هر یک از ضرایب بسته به نوع تئوری می‌توانند مقدار صفر و یک را به خود بگیرند. شرایط مختلف این ضرایب و تئوری حاصل از آن‌ها در جدول (۱) آمده است:

جدول ۱- اثر تغییر ضرایب مختلف در ایجاد برخی تئوری‌های پوسته

نام تئوری	ضرایب تعیین‌کننده نوع تئوری				
	C_1	C_2	C_3	C_4	γ_0
FSDT	۰	۰	۰	۰	۰
RFSDT	۰	۰	۰	۰	۱
HOST8	۱	۱	۰	۰	۰
RHOST8	۱	۱	۰	۰	۱
HOST10	۱	۱	۰	۱	۰
RHOST10	۱	۱	۰	۱	۱
HOST12	۱	۱	۱	۱	۰
RHOST12	۱	۱	۱	۱	۱

در جدول (۱) منظور از FSDT و HOST به ترتیب تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی است درصورتی‌که $\gamma_0 = 1$ باشد و یا به عبارتی اثر ترم ذوزنقه‌ای در محاسبات لحاظ شده باشد، حرف R (Refined)، به ابتدای نام تئوری اضافه می‌شود. همچنین شماره‌های نوشته شده در جلوی نام تئوری‌های مرتبه بالا، متمایزکننده نوع آن تئوری از دیگر تئوری‌ها است.

در پوسته‌های ضخیم ضریب γ_0 در تئوری ارائه شده برابر با یک درنظرگرفته می‌شود، با این عمل اثر شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته لحاظ شده و تئوری اصلاح‌شده حاصل می‌شود. در پوسته‌های نازک می‌توان از این اثر صرف‌نظر کرد.

تعریف روابط کرنش جابه‌جایی

با استفاده از تئوری الاستیسیته، روابط مربوط به کرنش پوسته‌های دو انحنایی در دستگاه مختصات منحنی‌الخط به‌صورت زیر است [۱۳، ۱۴]:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_x}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{r_x}\right)\ \varepsilon_y=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_y}}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{r_y}\right)\\&\gamma_{yz}=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_y}}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{v}{r_y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\ \varepsilon_z=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\&\gamma_{xz}=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_x}}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{u}{r_x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned}\tag{۴}$$

با جایگذاری جملات مربوط به جابه‌جایی‌ها از رابطه (۱) در روابط (۴) و دسته‌بندی مجدد آن‌ها می‌توان به روابط زیر دست یافت:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_y=\varepsilon_x=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_x}}\right)\left(\varepsilon_{x_0}+z\chi_x+z^2\varepsilon_{x_0}^*+z^3\chi_x^*\right)\\&\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_y}}\right)\left(\varepsilon_{y_0}+z\chi_y+z^2\varepsilon_{y_0}^*+z^3\chi_y^*\right)\varepsilon_z=\\&\left(\varepsilon_{z_0}+z\chi_z+z^2\varepsilon_{z_0}^*\right)\gamma_{xy}=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_x}}\right)\left(\varepsilon_{xy_0}+\right.\\&\left.z\chi_{xy}+z^2\varepsilon_{xy_0}^*+z^3\chi_{xy}^*\right)+\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_y}}\right)\left(\varepsilon_{yx_0}+\right.\\&\left.z\chi_{yx}+z^2\varepsilon_{yx_0}^*+z^3\chi_{yx}^*\right)\gamma_{xz}=\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_x}}\right)\left(\varphi_{x0}+\right.\\&\left.z\chi_{xz0}+z^2\varphi_{x0}^*+z^3\chi_{xz0}^*\right)+\left(\varphi_{x1}+z\chi_{xz1}+\right.\\&\left.z^2\varphi_{x1}^*\right)+\left(\varphi_{y1}+z\chi_{yz1}+z^2\varphi_{y1}^*\right)\gamma_{yz}=\\&\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma_0 z}{r_y}}\right)\left(\varphi_{y0}+z\chi_{yz0}+z^2\varphi_{y0}^*+z^3\chi_{yz0}^*\right)\end{aligned}\tag{۵}$$

در روابط (۵) جملات به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{x_0}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{w_0}{r_x},\chi_x=\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+\\&\varepsilon_{x_0}^*=C_3\frac{\partial u_0^*}{\partial x}+C_1\frac{w_0^*}{r_x},\chi_x^*=C_4\frac{\partial\theta_x^*}{\partial x}+C_1\frac{\theta_z}{r_x},\\&C_2\frac{\theta_z^*}{r_x}\ \varepsilon_{y_0}=\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{w_0}{r_y},\chi_y=\gamma_0\frac{1}{r_y}\frac{\partial v_0}{\partial y}+\\&\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+C_1\frac{\theta_z}{r_y},\varepsilon_{y_0}^*=C_3\frac{\partial v_0^*}{\partial y}+C_1\frac{w_0^*}{r_y},\chi_y^*=\\&C_4\frac{\partial\theta_y^*}{\partial y}+C_2\frac{\theta_z^*}{r_y}\ \varepsilon_{z_0}=C_1\theta_z,\chi_z=\\&2C_1w_0^*,\varepsilon_{z_0}^*=3C_2\theta_z^*,\varepsilon_{xy_0}=\frac{\partial v_0}{\partial x},\chi_{xy}=\\&\gamma_0\frac{1}{r_y}\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x},\varepsilon_{xy_0}^*=C_3\frac{\partial v_0^*}{\partial x},\chi_{xy}^*=\\&C_4\frac{\partial\theta_y^*}{\partial x}\ \varepsilon_{yx_0}=\frac{\partial u_0}{\partial y},\chi_{yx}=\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial\theta_x}{\partial y},\\&\varepsilon_{yx_0}^*=C_3\frac{\partial u_0^*}{\partial y},\chi_{yx}^*=C_4\frac{\partial\theta_x^*}{\partial y}\ \varphi_{x0}=\frac{\partial w_0}{\partial x}-\\&\frac{u_0}{r_x},\chi_{xz0}=C_1\frac{\partial\theta_z}{\partial x}-\gamma_0\frac{u_0}{r_x^2}-\frac{\theta_x}{r_x},\varphi_{x0}^*=\\&C_1\frac{\partial w_0^*}{\partial x}-C_3\frac{u_0^*}{r_x},\chi_{xz0}^*=C_2\frac{\partial\theta_z^*}{\partial x}-\\&C_4\frac{\theta_x^*}{r_x},\varphi_{x1}=\gamma_0\frac{u_0}{r_x}+\theta_x,\chi_{xz1}=2C_3u_0^*,\\&\varphi_{x1}^*=3C_4\theta_x^*,\ \ \varphi_{y0}=\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{v_0}{r_y},\ \chi_{yz0}=\\&C_1\frac{\partial\theta_z}{\partial y}-\gamma_0\frac{v_0}{r_y^2}-\frac{\theta_y}{r_y},\varphi_{y0}^*=C_1\frac{\partial w_0^*}{\partial y}-\\&C_3\frac{v_0^*}{r_y},\chi_{yz0}^*=C_2\frac{\partial\theta_z^*}{\partial y}-C_4\frac{\theta_y^*}{r_y}\ \varphi_{y1}=\gamma_0\frac{v_0}{r_y}+\\&\theta_y,\chi_{yz1}=2C_3v_0^*,\varphi_{y1}^*=3C_4\theta_y^*\end{aligned}\tag{۶}$$

روابط تنش-کرنش و منتجه‌های تنش

روابط تنش-کرنش سه‌بعدی برای لایه k ام از یک چندلایه ارتوتروپیک در دستگاه مختصات منحنی‌الخط و منطبق بر محورهای اصلی ماده به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{12}\\\tau_{13}\\\tau_{23}\end{Bmatrix}^k=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\C_{12}&C_{22}&C_{23}&0&0&0\\C_{13}&C_{23}&C_{33}&0&0&0\\0&0&0&C_{44}&0&0\\0&0&0&0&C_{55}&0\\0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}^K\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{12}\\\gamma_{13}\\\gamma_{23}\end{Bmatrix}^k\tag{۷}$$

که در رابطه بالا درایه‌های ماتریس سفتی به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$\begin{aligned}&C_{13}=C_{11}=\frac{E_{11}(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\nu^*},C_{12}=\frac{E_{11}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})}{\nu^*},\\&\frac{E_{11}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})}{\nu^*}\ C_{22}=\frac{E_{22}(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\nu^*},C_{23}=\\&\frac{E_{22}(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\nu^*},C_{33}=\frac{E_{33}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\nu^*}\ C_{44}=\\&G_{12},C_{55}=G_{13},C_{66}=G_{23}\ \nu^*=(1-\nu_{12}\nu_{21}-\\&\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})\end{aligned}\tag{۸}$$

در روابط (۸) مدول‌های یانگ، مدول‌های برشی و ضرایب پواسون به‌صورت زیر به هم مرتبط هستند:

$$\begin{aligned}&\frac{\nu_{12}}{E_{11}}=\frac{\nu_{21}}{E_{22}},\ \frac{\nu_{13}}{E_{11}}=\frac{\nu_{31}}{E_{33}},\ \frac{\nu_{23}}{E_{22}}=\frac{\nu_{32}}{E_{33}}\\&G_{12}=\frac{E_{11}}{2(1+\nu_{21})},\ G_{13}=\frac{E_{11}}{2(1+\nu_{31})},\\&G_{23}=\frac{E_{22}}{2(1+\nu_{32})}\end{aligned}\tag{۹}$$

در صورتی‌که محورهای مختصات اصلی و محورهای اصلی ماده بر هم منطبق نباشند، تنش‌ها و کرنش‌ها به‌صورت زیر باهم رابطه دارند [۱۲]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\sigma_{xy}\\\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}&Q_{14}&0&0\\Q_{12}&Q_{22}&Q_{23}&Q_{24}&0&0\\Q_{13}&Q_{23}&Q_{33}&Q_{34}&0&0\\Q_{14}&Q_{24}&Q_{34}&Q_{44}&0&0\\0&0&0&0&Q_{55}&Q_{56}\\0&0&0&0&Q_{56}&Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{xz}\\\gamma_{yz}\end{Bmatrix}\tag{۱۰}$$

که در آن‌ها ثوابت الاستیک ماده ارتوتروپیک مربوطه به لایه k ام به‌صورت زیر تعریف شده‌اند [۱۲]:

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= C_{11}c^4 + 2\,(C_{12}+2C_{44})\,s^2c^2 + C_{22}s^4 \\
Q_{12} &= C_{12}(c^4+s^4) + (C_{11}+C_{22}-2C_{44})\,s^2c^2 \\
Q_{13} &= C_1(C_{13}c^2+C_{23}s^2) \\
Q_{14} &= (C_{11}-C_{12}-2C_{44})\,sc^3 + \\
&\quad (C_{12}-C_{22}+2C_{44})\,cs^3 \\
Q_{22} &= C_{11}s^4 + 2(C_{12}+2C_{44})\,s^2c^2 + C_{22}c^4 \\
Q_{23} &= C_1(C_{13}s^2 + C_{23}c^2) \\
Q_{24} &= (C_{11}-C_{12}-2C_{44})\,s^3c + \\
&\quad (C_{12}-C_{22}+2C_{44})\,c^3s \\
Q_{33} &= C_1C_{33} \\
Q_{34} &= C_1(C_{31}-C_{32})\,sc \\
Q_{44} &= (C_{11}-2C_{12}+C_{22}-2C_{44})\,s^2c^2 + C_{44}(c^4+s^4) \\
Q_{55} &= C_{55}c^2 + C_{66}s^2 \\
Q_{56} &= (C_{55}-C_{66})\,sc \\
Q_{66} &= C_{55}s^2 + C_{66}c^2 \\
Q_{ij} &= Q_{ji} \quad , \quad i,j=1,\dots,6
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

که در آن‌ها $c=\cos(\theta)\,,s=\sin(\theta)$ وθ زاویه چرخش الیاف در هر لایه هستند. روابط کرنش از روابط (۵) و (۶) را در رابطه (۱۰) جایگزین کرده و در راستای ضخامت از آن‌ها انتگرال‌گیری می‌شود:
(۱۲)

$$
\begin{bmatrix}
N_x & N_x^* & M_x & M_x^* \\
N_y & N_y^* & M_y & M_y^* \\
N_z & N_z^* & M_z & - \\
N_{xy} & N_{xy}^* & M_{xy} & M_{xy}^* \\
N_{yx} & N_{yx}^* & M_{yx} & M_{yx}^* \\
Q_x & Q_x^* & S_x & S_x^* \\
R_x & R_x^* & T_x & - \\
Q_y & Q_y^* & S_y & S_y^* \\
R_y & R_y^* & T_y & -
\end{bmatrix}
= \sum_{i=1}^{NL}\int_{z_i}^{z_{i+1}}
\begin{bmatrix}
A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A_1A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1A_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1A_2
\end{bmatrix}
\times
\begin{Bmatrix}
\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zy}
\end{Bmatrix}
(1,z^2,z,z^3)\,dz
$$

$$
A_1 = 1+\frac{\gamma_0 z}{r_x}, A_2 = 1+\frac{\gamma_0 z}{r_y}
$$

که در آن:

$$
\begin{Bmatrix}
\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zy}
\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{55} & Q_{56} & Q_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{55} & Q_{56} & Q_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{56} & Q_{66} & Q_{66} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{56} & Q_{66} & Q_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy}
\end{Bmatrix}
\tag{۱۳}
$$

رابطه (۱۳) حالت گسترده‌تر رابطه (۱۰) است. جایگذاری همه مؤلفه‌ها و انجام عملیات جبری، منجر به تشکیل رابطهٔ بین منتجه‌های تنش و مؤلفه‌های کرنش خواهد شد که ضرایب روابط این دو مجموعه، تحت عنوان ماتریس D بیان می‌شود.

$$
\begin{bmatrix}
N_x & N_x^* & M_x & M_x^* \\
N_y & N_y^* & M_y & M_y^* \\
N_z & N_z^* & M_z & - \\
N_{xy} & N_{xy}^* & M_{xy} & M_{xy}^* \\
N_{yx} & N_{yx}^* & M_{yx} & M_{yx}^* \\
Q_x & Q_x^* & S_x & S_x^* \\
R_x & R_x^* & T_x & - \\
Q_y & Q_y^* & S_y & S_y^* \\
R_y & R_y^* & T_y & -
\end{bmatrix}
=
\sum_{L=1}^{NL}\int_{z_L}^{z_{L+1}}
\begin{bmatrix}
A_2Q_{11} & A_2Q_{12} & A_2Q_{13} & A_2Q_{14} & A_2Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_1Q_{12} & A_1Q_{22} & A_1Q_{23} & A_1Q_{24} & A_1Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_1A_2Q_{13} & A_1A_2Q_{23} & A_1A_2Q_{33} & A_1A_2Q_{34} & A_1A_2Q_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_2Q_{14} & A_2Q_{24} & A_2Q_{34} & A_2Q_{44} & A_2Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_1Q_{14} & A_1Q_{24} & A_1Q_{34} & A_1Q_{44} & A_1Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2Q_{55} & A_2Q_{55} & A_2Q_{56} & A_2Q_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1A_2Q_{55} & A_1A_2Q_{55} & A_1A_2Q_{56} & A_1A_2Q_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1Q_{56} & A_1Q_{56} & A_1Q_{66} & A_1Q_{66} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1A_2Q_{56} & A_1A_2Q_{56} & A_1A_2Q_{66} & A_1A_2Q_{66}
\end{bmatrix}
$$

$$
\times
\begin{Bmatrix}
\left(\frac{1}{A_1}\right)\left(\varepsilon_{x_0} + z\chi_x + z^2\varepsilon_{x_0}^* + z^3\chi_x^*\right) \\
\left(\frac{1}{A_2}\right)\left(\varepsilon_{y_0} + z\chi_y + z^2\varepsilon_{y_0}^* + z^3\chi_y^*\right) \\
\left(\varepsilon_{z_0} + z\chi_z + z^2\varepsilon_{z_0}^*\right) \\
\left(\frac{1}{A_1}\right)\left(\varepsilon_{xy_0} + z\chi_{xy} + z^2\varepsilon_{xy_0}^* + z^3\chi_{xy}^*\right) \\
\left(\frac{1}{A_2}\right)\left(\varepsilon_{yx_0} + z\chi_{yx} + z^2\varepsilon_{yx_0}^* + z^3\chi_{yx}^*\right) \\
\left(\frac{1}{A_1}\right)\left(\varphi_{x0} + z\chi_{xz0} + z^2\varphi_{x0}^* + z^3\chi_{xz0}^*\right) \\
\left(\varphi_{x1} + z\chi_{xz1} + z^2\varphi_{x1}^*\right) \\
\left(\frac{1}{A_2}\right)\left(\varphi_{y0} + z\chi_{yz0} + z^2\varphi_{y0}^* + z^3\chi_{yz0}^*\right) \\
\left(\varphi_{y1} + z\chi_{yz1} + z^2\varphi_{y1}^*\right)
\end{Bmatrix}
(1,z^2,z,z^3)\,dz
\tag{۱۴}
$$

به‌عنوان مثال برای N_x داریم:

$$
\begin{aligned}
N_x = {}& \frac{A_2}{A_1}Q_{11}\varepsilon_{x_0} + Q_{12}\varepsilon_{y_0} + \frac{A_2}{A_1}Q_{14}\varepsilon_{xy_0} + \\
& Q_{14}\varepsilon_{yx_0} + \frac{A_2}{A_1}Q_{11}z^2\varepsilon_{x_0}^* + Q_{12}z^2\varepsilon_{y_0}^* + \\
& \frac{A_2}{A_1}Q_{14}z^2\varepsilon_{xy_0}^* + Q_{14}z^2\varepsilon_{yx_0}^* + A_2Q_{13}\varepsilon_{z_0} + \\
& A_2Q_{13}z^2\varepsilon_{z_0}^* + \frac{A_2}{A_1}Q_{11}z\chi_x + Q_{12}z\chi_y + \\
& \frac{A_2}{A_1}Q_{14}z\chi_{xy} + Q_{14}z\chi_{yx} + \frac{A_2}{A_1}Q_{11}z^3\chi_x^* + \\
& Q_{12}z^3\chi_y^* + \frac{A_2}{A_1}Q_{14}z^3\chi_{xy}^* + Q_{14}z^3\chi_{yx}^* + \\
& A_2Q_{13}z\chi_z
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

بدین ترتیب رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$
\bar{\sigma} = D\bar{\varepsilon} \tag{۱}
$$

که در آن به ترتیب $\bar{\sigma}$ و $\bar{\varepsilon}$ منتجه‌های تنش و مؤلفه‌های کرنش هستند و به‌صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$
\bar{\sigma} =
\begin{pmatrix}
N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, \\
N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*, N_{yx}^*, \\
N_z, N_z^*, M_x, M_y, \\
M_{xy}, M_{yx}, M_x^*, M_y^*, \\
M_{xy}^*, M_{yx}^*, M_z, Q_x, \\
R_x, Q_y, R_y, Q_x^*, \\
R_x^*, Q_y^*, R_y^*, S_x, \\
T_x, S_y, T_y, S_x^*, S_y^*
\end{pmatrix}^T
\tag{۱۷}
$$

$$\bar{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{x_0},\varepsilon_{y_0},\varepsilon_{xy_0},\varepsilon_{yx_0},\\ \varepsilon^*_{x_0},\varepsilon^*_{y_0},\varepsilon^*_{xy_0},\varepsilon^*_{yx_0},\\ \varepsilon_{z_0},\varepsilon^*_{z_0},\chi_x,\chi_y,\\ \chi_{xy},\chi_{yx},\chi^*_x,\chi^*_y,\\ \chi^*_{xy},\chi^*_{yx},\chi_z,\varphi_{x_0},\\ \varphi_{x_1},\varphi_{y_0},\varphi_{y_1},\varphi^*_{x_0},\\ \varphi^*_{x_1},\varphi^*_{y_0},\varphi^*_{y_1},\chi_{xz_0},\\ \chi_{xz_1},\chi_{yz_0},\chi_{yz_1},\chi^*_{xz_0},\chi^*_{yz_0}\end{pmatrix}^T \tag{۱۸}$$

در رابطه (۱۶)، D ماتریس سفتی است که متشکل از ماتریس‌های سفتی D_m، D_{mc}، D_{bc}، D_b و D_s بوده است.

$$D=\begin{bmatrix}D_f & 0\\ 0 & K_0D_s\end{bmatrix}, D_f=\begin{bmatrix}D_m & D_{mc}\\ D_{bc} & D_b\end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

در روابط بالا K_0 ضریب تصحیح برشی است که در تئوری‌های مرتبه اول لحاظ می‌شود. این ضریب بر اساس تئوری میندلین برابر با ($K_0=\frac{\pi^2}{12}$) است. بدیهی است در تئوری‌های مرتبه بالاتر این ضریب برابر یک در نظر گرفته می‌شود.

در انتگرال‌گیری که منجر به رابطه (۱۶) شد، می‌بایست از عباراتی که شامل‌ترم ذوزنقه‌ای هستند، انتگرال گرفته شود، در این پژوهش به‌منظور حصول پاسخ‌های واقعی این عمل به‌صورت دقیق انجام شده است.

معادلات حاکم

به‌منظور انجام تحلیل دینامیکی، معادلات حاکم بر پوسته دو انحنایی با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می‌شود.

صورت تحلیلی اصل هامیلتون به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[U-K-W]\,dt=0 \tag{۲۰}$$

در عبارت بالا U انرژی کرنشی ناشی از تغییر شکل بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$U=\frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV \tag{۲۱}$$

و همچنین K انرژی جنبشی است و عبارت است از [۱۴]:

$$K=\frac{1}{2}\iiint_V \rho(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)dV \tag{2}$$

در رابطهٔ (۲۰) W کار ناشی از نیروهای خارجی بوده و در مسئله حاضر به دلیل عدم وجود این‌گونه نیروها صفر درنظرگرفته می‌شود.

در روابط بالا المان سطح به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$dA=A_1A_2dxdy \tag{۲۳}$$

به‌منظور حل مسئله رابطه (۲۰) به‌صورت رابطه (۲۴) بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^t[\delta U-\delta K]\,dt=0 \tag{۲۴}$$

بدین منظور عبارت مربوط به انرژی جنبشی (۲۲) در رابطه (۲۴) جایگذاری می‌شود و تغییرات تابعی انرژی جنبشی محاسبه می‌شود [۱۴]:

$$\int_0^t\delta K\,dt=\frac{1}{2}\int_0^t\iiint_V \rho(2\dot{u}\delta\dot{u}+2\dot{v}\delta\dot{u}+2\dot{w}\delta\dot{u})dVdt \tag{۲۵}$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء رابطه زیر حاصل می‌گردد [۱۴]:

$$\int_0^t\delta K\,dt=-\int_0^t\left[\iiint_V \rho(\ddot{u}\delta u+\ddot{v}\delta u+\iiint_V \rho(\ddot{u}\delta u+\ddot{v}\delta u+\ddot{w}\delta u)dAdz\right]\,dt+\ddot{w}\delta u)dAdz\Big|_{t=0}^{t=t}\int_0^t\delta K\,dt=-\int_0^t\int_0^a\int_0^b\int_{-h/2}^{+h/2}\rho(\dot{u}\delta\dot{u}+\dot{v}\delta\dot{u}+\dot{w}\delta\dot{u})\,dAdzdt \tag{۲۶}$$

با توجه به تعریف اصل هامیلتون تغییرات متغیرها در زمان‌های ابتدایی و انتهایی تحلیل صفر درنظرگرفته می‌شود، بنابراین جمله دوم در رابطه (۲۶) صفر منظور می‌شود.

با جایگذاری مؤلفه‌های جابه‌جایی در رابطه بالا، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_0^t\delta K\,dt&=-\int_0^t\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left[\iint_A\rho(\ddot{u}\delta u+\ddot{v}\delta u+\ddot{w}\delta u)dA\right]dz\right]dt\\ &=-\int_0^t\left[\int_{-h/2}^{h/2}\left[\iint_A\rho\begin{bmatrix}\left(\ddot{u}_0(1+\frac{\gamma_0z}{r_x})+z\ddot{\theta}_x+C_3z^2\ddot{u}_0^*+C_4z^3\ddot{\theta}_x^*\right)\times\\ \left(\delta u_0(1+\frac{\gamma_0z}{r_x})+z\delta\theta_x+C_3z^2\delta u_0^*+C_4z^3\delta\theta_x^*\right)+\\ \left(\ddot{v}_0(1+\frac{\gamma_0z}{r_y})+z\ddot{\theta}_y+C_3z^2\ddot{v}_0^*+C_4z^3\ddot{\theta}_y^*\right)\times\\ \left(\delta v_0(1+\frac{\gamma_0z}{r_y})+z\delta\theta_y+C_3z^2\delta v_0^*+C_4z^3\delta\theta_y^*\right)+\\ \left(\ddot{w}_0+C_1z\ddot{\theta}_z+C_1z^2\ddot{w}_0^*+C_2z^3\ddot{\theta}_z^*\right)\times\\ \left(\delta w_0+C_1z\delta\theta_z+C_1z^2\delta w_0^*+C_2z^3\delta\theta_z^*\right)\end{bmatrix}dA\right]dz\right]dt\end{aligned} \tag{۲۷}$$

در این مرحله تغییرات تابعی انرژی کرنشی محاسبه می‌شود:

$$\int_0^t\delta U\,dt=\int_0^t\int_0^a\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\\ \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}+\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}\end{bmatrix}dAdzdt \tag{۲۸}$$

و با جایگذاری مؤلفه‌های کرنش از روابط (۵) و (۶) در رابطه (۲۸) رابطه زیر ایجاد می‌شود:

*تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_x:

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \delta\varepsilon_x \, dz \; dA =$$

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \frac{1}{A_1} \begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{w_0}{r_x}) + \\ z(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_x}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_x}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_x}) \end{pmatrix} dz \, A_1 A_2 dydx \; =$$

$$\iint_A \begin{pmatrix} N_x \left(\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{w_0}{r_x}\right) + \\ M_x \left(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_x}\right) + \\ N_x^* \left(\delta C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_x}\right) + \\ M_x^* \left(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_x}\right) \end{pmatrix} dydx = \tag{۲۹}$$

$$\iint_A \begin{pmatrix} (\frac{\partial N_x}{\partial x}\delta u_0 - \frac{N_x}{r_x}\delta w_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_x}\frac{\partial M_x}{\partial x}\delta u_0 + \frac{\partial M_x}{\partial x}\delta\theta_x - C_1 \frac{M_x}{r_x}\delta\theta_z) + \\ (C_3 \frac{\partial N_x^*}{\partial x}\delta u_0^* - C_1 \frac{N_x^*}{r_x}\delta w_0^*) + \\ (C_4 \frac{\partial M_x^*}{\partial x}\delta\theta_x^* - C_2 \frac{M_x^*}{r_x}\delta\theta_z^*) \end{pmatrix} dydx$$

* تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_y:

$$\iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \delta\varepsilon_y \, dz \; dA =$$

$$- \iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \frac{1}{A_2} \begin{pmatrix} \left(\delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{w_0}{r_y}\right) + \\ z\left(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_y}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_y}\right) + \\ z^2\left(\delta C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial y} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_y}\right) + \\ z^3\left(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_y}\right) \end{pmatrix} dz \, A_1 A_2 dydx \; =$$

$$\iint_A \begin{pmatrix} N_y \left(\delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{w_0}{r_y}\right) + \\ M_y \left(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_y}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_y}\right) + \\ N_y^* \left(\delta C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial y} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_y}\right) + \\ M_y^* \left(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_y}\right) \end{pmatrix} dydx = \tag{۳۰}$$

$$- \iint_A \begin{pmatrix} (\frac{\partial N_y}{\partial y}\delta v_0 - \frac{N_y}{r_y}\delta w_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_y}\frac{\partial M_y}{\partial y}\delta v_0 + \frac{\partial M_y}{\partial y}\delta\theta_y - C_1 \frac{M_y}{r_y}\delta\theta_z) + \\ (C_3 \frac{\partial N_y^*}{\partial y}\delta v_0^* - C_1 \frac{N_y^*}{r_y}\delta w_0^*) + \\ (C_4 \frac{\partial M_y^*}{\partial y}\delta\theta_y^* - C_2 \frac{M_y^*}{r_y}\delta\theta_z^*) \end{pmatrix} dydx$$

*تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_z:

$$\begin{aligned} &\iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \delta\varepsilon_z \, dz \; dA = \\ &\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \left((\delta C_1 \theta_z) + z(\delta 2 C_1 w_0^*) + \right. \\ &\left. z^2(\delta 3 C_2 \theta_z^*)\right) \; dz \, A_1 A_2 dydx \; = \\ &\iint_A N_z(\delta C_1 \theta_z) + M_z(\delta 2 C_1 w_0^*) + \\ &N_z^*(\delta 3 C_2 \theta_z^*) dydx = - \iint_A (-(C_1 N_z \delta\theta_z) - \\ &(2 M_z C_1 \delta w_0^*) - (3 N_z^* C_2 \delta\theta_z^*)) dydx \end{aligned} \tag{۳۱}$$

* تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{xy} و ε_{yx}:

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + \sigma_{yx}\delta\varepsilon_{yx}) \, dz \; dA =$$

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \left(\sigma_{xy} \frac{1}{A_2} \begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial v_0}{\partial x}) + \\ z(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_y}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial x}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}) \end{pmatrix} \right) + \\ \left(\sigma_{yx} \frac{1}{A_1} \begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \\ z(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial y}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial y}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y}) \end{pmatrix} \right) dz \, A_1 A_2 dydx \end{pmatrix} =$$

$$\iint_A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{xy}(\delta \frac{\partial v_0}{\partial x}) + \\ M_{xy}(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_y}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) + \\ N_{xy}^*(\delta C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial x}) + \\ M_{xy}^*(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}) \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} N_{yx}(\delta \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \\ M_{yx}(\delta\gamma_0 \frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial y}) + \\ N_{yx}^*(\delta C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial y}) + M_{yx}^*(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} dydx = \tag{۳۲}$$

$$- \iint_A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta v_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_y}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta v_0 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta\theta_y) + \\ (C_3 \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x}\delta v_0^*) + \\ (C_4 \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x}\delta\theta_y^*) \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} (\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}\delta u_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_x}\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}\delta u_0 + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}\delta\theta_x) + \\ (C_3 \frac{\partial N_{yx}^*}{\partial y}\delta u_0^*) + (C_4 \frac{\partial M_{yx}^*}{\partial y}\delta\theta_x^*) \end{pmatrix} \end{pmatrix} dydx$$

*تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{xz} و ε_{zx}:

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz} + \sigma_{zx}\delta\varepsilon_{zx}) \, dz \; dA =$$

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \frac{1}{A_1} \begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \delta \frac{u_0}{r_x}) + \\ z(\delta C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \delta\gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - \delta \frac{\theta_x}{r_x}) + \\ z^2(\delta C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} - \delta C_3 \frac{u_0^*}{r_x}) + \\ z^3(\delta C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} - \delta C_4 \frac{\theta_x^*}{r_x}) \end{pmatrix} + \\ \sigma_{zx} \begin{pmatrix} (\delta\gamma_0 \frac{u_0}{r_x} + \delta\theta_x) + \\ z(\delta 2 C_3 u_0^*) + \\ z^2(\delta 3 C_4 \theta_x^*) \end{pmatrix} \end{pmatrix} dz \, A_1 A_2 dydx \; =$$

$$\iint_A \begin{pmatrix} Q_x(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \delta \frac{u_0}{r_x}) + \\ S_x(\delta C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \delta\gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - \delta \frac{\theta_x}{r_x}) + \\ Q_x^*(\delta C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} - \delta C_3 \frac{u_0^*}{r_x}) + \\ S_x^*(\delta C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} - \delta C_4 \frac{\theta_x^*}{r_x}) + \\ R_x(\delta\gamma_0 \frac{u_0}{r_x} + \delta\theta_x) + \\ T_x(\delta 2 C_3 u_0^*) + R_x^*(\delta 3 C_4 \theta_x^*) \end{pmatrix} dydx =$$

$$= \int - \iint_A \begin{pmatrix} (\frac{\partial Q_x}{\partial x}\delta w_0 + \frac{Q_x}{r_x}\delta u_0) + \\ (C_1 \frac{\partial S_x}{\partial x}\delta\theta_z + \gamma_0 \frac{S_x}{r_x^2}\delta u_0 + \frac{S_x}{r_x}\delta\theta_x) + \\ (C_1 \frac{\partial Q_x^*}{\partial x}\delta w_0^* + C_3 \frac{Q_x^*}{r_x}\delta u_0^*) + \\ (C_2 \frac{\partial S_x^*}{\partial x}\delta\theta_z^* + C_4 \frac{S_x^*}{r_x}\delta\theta_x^*) + \\ (-\gamma_0 \frac{R_x}{r_x}\delta u_0 - R_x\delta\theta_x) + \\ (-2 C_3 T_x \delta u_0^*) + (-3 C_4 R_x^* \delta\theta_x^*) \end{pmatrix} dydx \tag{۳۳}$$

*تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{yz} و ε_{zy}:

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz} + \sigma_{zy}\delta\varepsilon_{zy})\, dz\ dA =$$

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{yz}\frac{1}{A_2}\begin{pmatrix} (\delta\frac{\partial w_0}{\partial y} - \delta\frac{v_0}{r_y}) + \\ z(\delta C_1\frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \delta\gamma_0\frac{v_0}{r_y^2} - \delta\frac{\theta_y}{r_y}) + \\ z^2(\delta C_1\frac{\partial w_0^*}{\partial y} - \delta C_3\frac{v_0^*}{r_y}) + \\ z^3(\delta C_2\frac{\partial \theta_z^*}{\partial y} - \delta C_4\frac{\theta_y^*}{r_y}) \end{pmatrix} + \\ \sigma_{zy}\begin{pmatrix} (\delta\gamma_0\frac{v_0}{r_y} + \delta\theta_y) + \\ z(\delta 2C_3 v_0^*) + \\ z^2(\delta 3C_4\theta_y^*) \end{pmatrix} \end{pmatrix} dz\, A_1A_2 dydx\ =$$

$$\iint_A \begin{pmatrix} Q_y(\delta\frac{\partial w_0}{\partial y} - \delta\frac{v_0}{r_y}) + \\ S_y(\delta C_1\frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \delta\gamma_0\frac{v_0}{r_y^2} - \delta\frac{\theta_y}{r_y}) + \\ Q_y^*(\delta C_1\frac{\partial w_0^*}{\partial y} - \delta C_3\frac{v_0^*}{r_y}) + \\ S_y^*(\delta C_2\frac{\partial \theta_z^*}{\partial y} - \delta C_4\frac{\theta_y^*}{r_y}) + \\ R_y(\delta\gamma_0\frac{v_0}{r_y} + \delta\theta_y) + \\ T_y(\delta 2C_3 v_0^*) + R_y^*(\delta 3C_4\theta_y^*) \end{pmatrix} dydx = \qquad (۳۴)$$

$$\int - \iint_A \begin{pmatrix} (\frac{\partial Q_y}{\partial y}\delta w_0 + \frac{Q_y}{r_y}\delta v_0) + \\ (C_1\frac{\partial S_y}{\partial y}\delta\theta_z + \gamma_0\frac{S_y}{r_y^2}\delta v_0 + \frac{S_y}{r_y}\delta\theta_y) + \\ (C_1\frac{\partial Q_y^*}{\partial y}\delta w_0^* + C_3\frac{Q_y^*}{r_y}\delta v_0^*) + \\ (C_2\frac{\partial S_y^*}{\partial y}\delta\theta_z^* + C_4\frac{S_y^*}{r_y}\delta\theta_y^*) + \\ (-\gamma_0\frac{R_y}{r_y}\delta v_0 - R_y\delta\theta_y) + \\ (-2C_3T_y\delta v_0^*) + (-3C_4R_y^*\delta\theta_y^*) \end{pmatrix} dydx$$

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی

در اینجا با حل معادلات تعادل پوسته که در قسمت قبل به دست آمده است، به محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد و همچنین شکل مودهای متناظر با آن‌ها پرداخته می‌شود.

بدین منظور باید شرایط مرزی مورد نظر، توسط توابعی بر مؤلفه‌های جابه‌جایی اعمال شوند. برای این مسئله شرایط مرزی ساده به‌صورت زیر تعریف شده است [۱۲]:

$$\theta_y^* = \theta_z^* = v_0 = w_0 = \theta_y = \theta_z = v_0^* = w_0^* = N_x = M_x = N_x^* = M_x^* = 0 \qquad (۳۵)$$

به‌منظور ارضای شرایط مرزی ذکر شده در رابطه (۳۵) مؤلفه‌های جابه‌جایی پوسته به‌صورت حاصل‌ضرب توابع مثلثاتی در مختصات تعمیم‌یافته $T_{mn}(t)$ به‌صورت زیر درنظرگرفته می‌شوند [۱۲، ۱۵]:

$$\begin{array}{ll} u_0 = u_{0mn}\cos\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} & u_0^* = u_{0mn}^*\cos\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} \\ v_0 = v_{0mn}\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{iw_{mn}t} & v_0^* = v_{0mn}^*\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{iw_{mn}t} \\ w_0 = w_{0mn}\sin\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} & w_0^* = w_{0mn}^*\sin\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} \\ \theta_x = \theta_{xmn}\cos\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} & \theta_x^* = \theta_{xmn}^*\cos\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} \\ \theta_y = \theta_{ymn}\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{iw_{mn}t} & \theta_y^* = \theta_{ymn}^*\sin\alpha x\cos\beta y\ e^{iw_{mn}t} \\ \theta_z = \theta_{zmn}\sin\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} & \theta_z^* = \theta_{zmn}^*\sin\alpha x\sin\beta y\ e^{iw_{mn}t} \end{array} \qquad (۳۶)$$

که در روابط بالا $\alpha = \frac{m\pi}{a}$، $\beta = \frac{n\pi}{b}$، $T_{mn}(t) = e^{iw_{mn}t}$ و $\theta_{zmn}^*, \theta_{ymn}^*, \theta_{xmn}^*, w_{0mn}^*, v_{0mn}^*, u_{0mn}^*, \theta_{zmn}, \theta_{ymn}, \theta_{xmn}, w_{0mn}, v_{0mn}, u_{0mn}$ ثوابت شکل مودهای طبیعی می‌باشند.

پس از مرتب‌کردن معادلات تعادل، عملگرهای دیفرانسیلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & L_{1,4} & L_{1,5} & L_{1,6} & L_{1,7} & L_{1,8} & L_{1,9} & L_{1,10} & L_{1,11} & L_{1,12} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} & L_{2,4} & L_{2,5} & L_{2,6} & L_{2,7} & L_{2,8} & L_{2,9} & L_{2,10} & L_{2,11} & L_{2,12} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & L_{3,4} & L_{3,5} & L_{3,6} & L_{3,7} & L_{3,8} & L_{3,9} & L_{3,10} & L_{3,11} & L_{3,12} \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} & L_{4,5} & L_{4,6} & L_{4,7} & L_{4,8} & L_{4,9} & L_{4,10} & L_{4,11} & L_{4,12} \\ L_{5,1} & L_{5,2} & L_{5,3} & L_{5,4} & L_{5,5} & L_{5,6} & L_{5,7} & L_{5,8} & L_{5,9} & L_{5,10} & L_{5,11} & L_{5,12} \\ L_{6,1} & L_{6,2} & L_{6,3} & L_{6,4} & L_{6,5} & L_{6,6} & L_{6,7} & L_{6,8} & L_{6,9} & L_{6,10} & L_{6,11} & L_{6,12} \\ L_{7,1} & L_{7,2} & L_{7,3} & L_{7,4} & L_{7,5} & L_{7,6} & L_{7,7} & L_{7,8} & L_{7,9} & L_{7,10} & L_{7,11} & L_{7,12} \\ L_{8,1} & L_{8,2} & L_{8,3} & L_{8,4} & L_{8,5} & L_{8,6} & L_{8,7} & L_{8,8} & L_{8,9} & L_{8,10} & L_{8,11} & L_{8,12} \\ L_{9,1} & L_{9,2} & L_{9,3} & L_{9,4} & L_{9,5} & L_{9,6} & L_{9,7} & L_{9,8} & L_{9,9} & L_{9,10} & L_{9,11} & L_{9,12} \\ L_{10,1} & L_{10,2} & L_{10,3} & L_{10,4} & L_{10,5} & L_{10,6} & L_{10,7} & L_{10,8} & L_{10,9} & L_{10,10} & L_{10,11} & L_{10,12} \\ L_{11,1} & L_{11,2} & L_{11,3} & L_{11,4} & L_{11,5} & L_{11,6} & L_{11,7} & L_{11,8} & L_{11,9} & L_{11,10} & L_{11,11} & L_{11,12} \\ L_{12,1} & L_{12,2} & L_{12,3} & L_{12,4} & L_{12,5} & L_{12,6} & L_{12,7} & L_{12,8} & L_{12,9} & L_{12,10} & L_{12,11} & L_{12,12} \end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

با جایگذاری بردار شکل‌مودهای طبیعی $\varDelta$ در عملگرهای دیفرانسیلی، معادلات تعادل، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$L_{ij}(\varDelta_j) = 0 \qquad (۳۸)$$

برای حل دستگاه معادلات فوق از روش گالرکین استفاده می‌شود [۱۶، ۱۷]:

$$\int_0^b \int_0^a L_{ij}(\Delta_j)\ T_{mn}(t)\ \psi_i\ dx\ dy = 0 \qquad (۳۹)$$

که در آن، L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی هستند که مؤلفه‌های جابه‌جایی در آن‌ها جایگذاری شده‌اند و ψ بردار توابع وزنی بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi = \begin{Bmatrix} \cos\alpha x\sin\beta y \\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ \sin\alpha x\sin\beta y \\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ \sin\alpha x\sin\beta y \\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ \sin\alpha x\sin\beta y \\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ \sin\alpha x\sin\beta y \end{Bmatrix} \qquad \Delta = \begin{Bmatrix} u_{0mn}\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ v_{0mn}\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ w_{0mn}\ \sin\alpha x\sin\beta y \\ \theta_{xmn}\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ \theta_{ymn}\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ \theta_{zmn}\ \sin\alpha x\sin\beta y \\ u_{0mn}^*\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ v_{0mn}^*\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ w_{0mn}^*\ \sin\alpha x\sin\beta y \\ \theta_{xmn}^*\ \cos\alpha x\sin\beta y \\ \theta_{ymn}^*\ \sin\alpha x\cos\beta y \\ \theta_{zmn}^*\ \sin\alpha x\sin\beta y \end{Bmatrix} \qquad (۴۰)$$

با انجام انتگرال رابطه (۳۸) و مرتب‌سازی آن، معادله مقدار ویژه زیر به‌دست می‌آید:

$$[K-\omega_{mn}^2 M]\{d\}=0 \quad (۴۱)$$

که در آن:

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}, \\ \theta_{zmn}, u_{0mn}^*, v_{0mn}^*, w_{0mn}^*, \theta_{xmn}^*, \theta_{ymn}^*, \theta_{zmn}^* \end{Bmatrix}^T \quad (۴۲)$$

با حل این معادله مقدار ویژه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر با آن به‌دست می‌آیند. بدین‌صورت که کوچک‌ترین فرکانس طبیعی پوسته برابر با ریشه دوم کوچک‌ترین مقدار ویژه می‌باشد. برای به‌دست آوردن این مقادیر، ماتریس‌های K و M در رابطه (۴۰) قرار می‌گیرند و به کمک برنامه‌نویسی در نرم‌افزار متلب فرکانس‌های طبیعی محاسبه می‌شود.

تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مشبک

در پوسته‌های مشبک به دلیل تفاوت بین جنس ریب‌ها و فضای خالی بین ریب‌ها، نمی‌توان توزیع سفتی را به‌صورت یکنواخت درنظر گرفت؛ لذا این امر توسط تابع پله‌ای هویساید رابطه (۴۳) انجام می‌شود [۱۸].

$$Q_{ij}(x,y)=Q_{ij}^{rib}[1-HP(x,y)]+Q_{ij}^{bay}HP(x,y) \quad (۴۳)$$

در رابطه (۴۳)، سفتی کل: $Q_{ij}(x,y)$ ، سفتی ریب‌ها: Q_{ij}^{rib}، سفتی مواد پرکننده: Q_{ij}^{bay}، تابع توزیع: $HP(x,y)$ است که تابع توزیع بر روی ریب‌ها مقدار یک و بر روی نواحی پرکننده مقدار صفر را اختیار می‌کند.

$$HP(x,y)=\begin{cases}1 & \text{بین ریب‌ها}\\ 0 & \text{روی ریب‌ها}\end{cases} \quad (۴۴)$$

به‌عنوان مثال برای یک سازه مقاوم شده با خانه‌های مربعی[۱۶] تابع توزیع موردنظر با استفاده از تابع هویساید به‌صورت رابطه (۴۵) بیان می‌شود [۱۸].

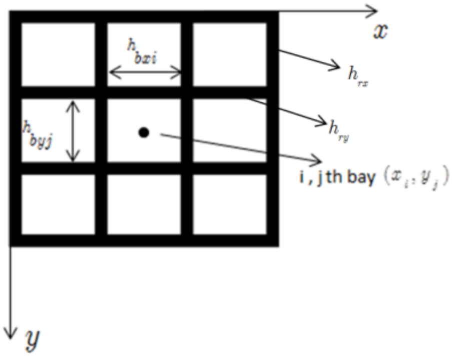
$$HP(x,y)=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\begin{matrix}[H(x-x_i+\frac{h_{bxi}}{2})-H(x-x_i-\frac{h_{bxi}}{2})]\times\\ [H(y-y_j+\frac{h_{byj}}{2})-H(y-y_j-\frac{h_{byj}}{2})]\end{matrix} \quad (۴۵)$$

همچنین مشتقات آن نسبت به متغیرهای x و y به‌صورت رابطه (۴۶) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\frac{\partial HP(x,y)}{\partial x}=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\begin{matrix}[\delta(x-x_i+\frac{h_{bxi}}{2})-\delta(x-x_i-\frac{h_{bxi}}{2})]\times\\ [H(y-y_j+\frac{h_{byj}}{2})-H(y-y_j-\frac{h_{byj}}{2})]\end{matrix}$$
$$\frac{\partial HP(x,y)}{\partial y}=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\begin{matrix}[H(x-x_i+\frac{h_{bxi}}{2})-H(x-x_i-\frac{h_{bxi}}{2})]\times\\ [\delta(y-y_j+\frac{h_{byj}}{2})-\delta(y-y_j-\frac{h_{byj}}{2})]\end{matrix} \quad (۴۶)$$

[۱۶] Orthogrid

در شکل (۳) مشخصات هندسی پوسته مشبک با ریب‌های افقی و عمودی و در شکل (۴) پوسته مشبک با ریب‌هایی با زوایای مختلف ارائه شده است.



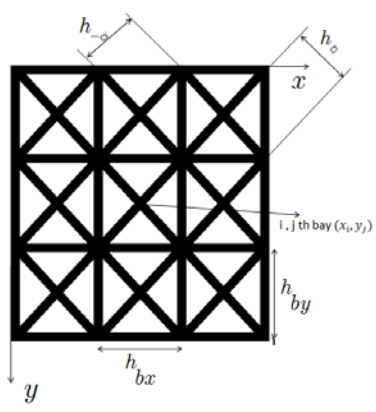
شکل ۳- مشخصات پوسته مشبک با ریب‌های افقی و عمودی

درصورتی‌که در سازه مشبک مورد مطالعه، ریب‌ها ارتوتروپیک باشند، ریب‌های افقی، عمودی و زاویه‌دار موجود به همراه مواد پرکننده به‌صورت زیر تحلیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}Q_{ij}&=Q_{ij}^{0}(1-HP^{0})+Q_{ij}^{90}(1-HP^{90})+\\ &Q_{ij}^{\phi}(1-HP^{\phi})+Q_{ij}^{-\phi}(1-HP^{-\phi})+\\ &Q_{ij}^{bay}(HP^{0}\times HP^{90}\times HP^{\phi}\times HP^{-\phi})\end{aligned} \quad (۴۷)$$

سفتی ریب‌های در جهت ϕ: Q_{ij}^{ϕ}، تابع توزیع ریب‌های در جهت ϕ: HP^{ϕ}

$$\begin{aligned}HP^{0}&=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\left[H(y-y_j+\frac{h_{byj}}{2})-H(y-y_j-\frac{h_{byj}}{2})\right]\\ HP^{90}&=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\left[H(x-x_i+\frac{h_{axi}}{2})-H(x-x_i-\frac{h_{axi}}{2})\right]\\ HP^{\phi}&=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\left[H(x-x_i+\frac{h_{\phi x}}{2})-H(x-x_i-\frac{h_{\phi x}}{2})\right]\times\\ &\left[H(y-y_j+\frac{h_{\phi y}}{2})-H(y-y_j-\frac{h_{\phi y}}{2})\right]\\ HP^{-\phi}&=\sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\left[H(x-x_i+\frac{h_{-\phi x}}{2})-H(x-x_i-\frac{h_{-\phi x}}{2})\right]\times\\ &\left[H(y-y_j+\frac{h_{-\phi y}}{2})-H(y-y_j-\frac{h_{-\phi y}}{2})\right]\end{aligned} \quad (۴۸)$$



شکل ۴- مشخصات پوسته مشبک با ریب‌های با زوایای مختلف

در این موارد مشتقات نسبت به متغیرهای x و y به‌عنوان مثال برای HP^0 به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial HP^0}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m_x}\sum_{j=1}^{m_y}\left[\delta(y-y_j+\frac{h_{byj}}{2})-\delta(y-y_j-\frac{h_{byj}}{2})\right] \qquad (۴۹)$$
$$\frac{\partial HP^0}{\partial x} = 0$$

که در روابط بالا x_i و y_j مختصات مرکز هر خانه، h ضخامت ریب‌ها و $m_x \times n_y$ تعداد خانه‌ها را نشان می‌دهد.

$$x_i \;,\; i=1,\ldots m_x \qquad (۵۰)$$
$$y_j \;,\; j=1,\ldots n_y$$

روابط تنش-کرنش

روابط تنش-کرنش در پوسته‌های مشبک نیز مانند پوسته‌های کامپوزیتی معمولی و مطابق با روابط (۱۲) تا (۱۴) حاصل می‌شود، با این تفاوت که به‌جای Q_{ij}ها در آن‌ها از روابط (۴۳) و (۴۸) به ترتیب برای پوسته مشبک به ریب‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک استفاده می‌شود تا بتوان توزیع متفاوت مواد در اجزای سازه مشبک را لحاظ کرد؛ درواقع تفاوت در روابط مربوط به پوسته‌های مشبک نسبت به پوسته‌های کامپوزیتی در ماتریس سفتی $D(x, y)$ آن‌ها می‌باشد.

معادلات حاکم بر پوسته‌های مشبک دو انحنایی همانند پوسته‌های کامپوزیتی غیر مشبک استخراج می‌شود.

در مرحله جایگذاری منتجه‌های تنش در معادلات اویلر و استخراج عملگرهای دیفرانسیلی باید توجه داشت که در اینجا برخلاف پوسته‌های غیرمشبک عناصر ماتریس D نیز به دلیل وجود تابع هویساید، نسبت به متغیرهای x, y تغییرات دارند و در عملیات مشتق‌گیری وارد می‌شوند. بنابراین مشتقات مربوطه از روابط (۴۶) و (۴۹) در محاسبات وارد می‌شود. پس از به دست آوردن تمامی عملگرهای دیفرانسیلی به طریقه گفته شده، بقیه مراحل تا به‌دست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی، مانند پوسته‌های کامپوزیتی معمولی خواهد بود. چندین نمونه از عملگرهای دیفرانسیلی مربوط به پوسته‌های مشبک در پیوست آمده است، به‌عنوان مثال اولین عضو از عملگرهای دیفرانسیلی در پوسته‌های کامپوزیتی به‌صورت زیر بیان شد (عبارات بدون خط) که در پوسته‌های مشبک جملاتی که زیر آن‌ها خط کشیده شده نیز به دلیل وجود مشتق در درایه‌های ماتریس D اضافه می‌شوند:

$$L_{11} = D_{m1,1}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{m1,4}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{mc1,1}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} +$$
$$D_{mc1,4}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} +$$
$$\underline{{}_{,1}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{m1,4}}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{mc1,1}}{\partial x}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{mc1,4}}{\partial x}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y}} +$$
$$D_{bc1,1}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{bc1,4}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{b1,1}\gamma_0\frac{1}{r_x^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} +$$
$$D_{b1,4}\gamma_0\frac{1}{r_x r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} +$$
$$\underline{\frac{{}_{bc1,4}}{\partial x}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{b1,1}}{\partial x}\gamma_0\gamma_0\frac{1}{r_x^2}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{b1,4}}{\partial x}\gamma_0\gamma_0\frac{1}{r_x r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y}} +$$
$$D_{m4,1}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + D_{m4,4}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{mc4,1}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} +$$
$$D_{mc4,4}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} +$$
$$\underline{{}_{,1}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{m4,4}}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{mc4,1}}{\partial y}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{mc4,4}}{\partial y}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y}} +$$
$$D_{bc4,1}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + D_{bc4,4}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{b4,1}\gamma_0\frac{1}{r_x r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} +$$
$$D_{b4,4}\gamma_0\frac{1}{r_x r_x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} -$$
$$\underline{\frac{{}_{c4,4}}{y}\gamma_0\frac{1}{r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{b4,1}}{\partial y}\gamma_0\gamma_0\frac{1}{r_x r_x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{b4,4}}{\partial y}\gamma_0\gamma_0\frac{1}{r_x r_x}\frac{\partial u_0}{\partial y} -}$$
$$D_{s1,1}\frac{u_0}{r_x^2} + D_{s1,2}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^2} - D_{s1,9}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^3} + D_{s2,1}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^2} -$$
$$D_{s2,2}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^2} + D_{s2,9}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^3} - D_{s9,1}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^3} + D_{s9,2}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^3} -$$
$$D_{s9,9}\gamma_0\frac{u_0}{r_x^4} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\left(\bar{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{r_x}\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0^2}{r_x^2}\bar{I}_2\right)$$

(۵۱)

نتایج و بحث

پوسته دو انحنایی

بیمارادی در ۱۹۹۱، با استفاده از معادلات الاستیسیته به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های دو انحنایی چندلایه‌ای و همگن، با زمینه مستطیلی و ساخته شده از مواد ارتوتروپیک، پرداخت. او حل این مسئله را با فرض ناچیز بودن نسبت ضخامت پوسته به شعاع سطح میانی در مقایسه با واحد، به انجام رسانید. وی در محاسبه نتایج از رابطه زیر برای نرمال کردن پاسخ بهره گرفت [۱۹]:

$$\omega^* = \omega a\sqrt{\rho / E_{22}} \qquad (۵۲)$$

خواص ماده نیز به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$E_1/E_2 = 25$$
$$E_2/E_3 = 1 \qquad (۵۳)$$
$$G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$$

$$G_{23}/E_2 = 0.2$$
$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

در جدول (۲) مقادیر مربوط به پوسته ارتوتروپیک تک لایه همگن بین حل دقیق سه‌بعدی، تئوری RHOST12 ارائه شده در پژوهش حاضر و تئوری مرتبه بالای مرجع [۱۹] مورد مقایسه قرار گرفته است. درصد تفاوت با حل دقیق گویای دقت بالای تئوری ارائه شده می‌باشد. همچنین به‌منظور مقایسه با نتایج حل عددی تحلیل المان محدود با استفاده نرم‌افزار آباکوس انجام گرفته است.

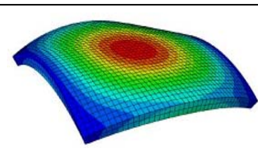
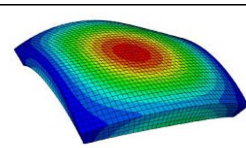
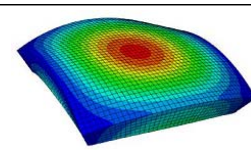
همان‌طور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود، با کاهش نسبت a/r_x دقت تئوری مرتبه بالای ارائه شده افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال برای h/a = 0.05 و $a/r_x = 1$ اختلاف بین تئوری RHOST12 و حل دقیق ۲/۷۵٪ است که این اختلاف در h/a = 0.05 و $a/r_x = 0.1$ به ۰/۱۸٪ کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که با افزایش نسبت h/a دقت تئوری RHOST12 کاهش می‌یابد. به‌طور مثال برای h/a = 0.15 و $a/r_x = 1$ درصد اختلاف بین تئوری حاضر و حل دقیق به ۷/۳۴٪ می‌رسد.

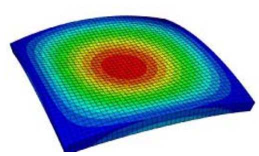
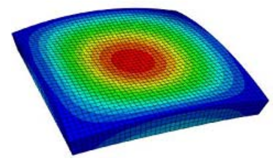
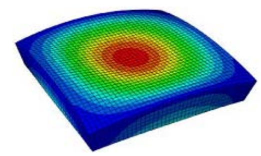
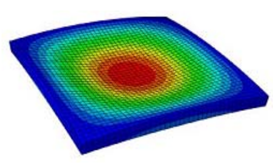
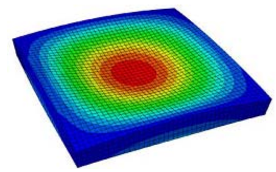
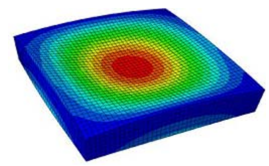
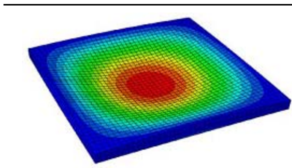
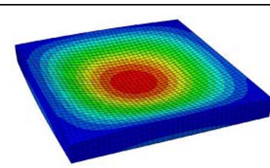
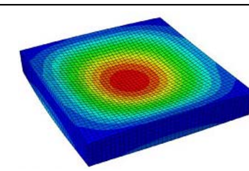
کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی مربوط به پوسته کامپوزیتی دو انحنایی کروی متقاطع نامتقارن با لایه چینی (۰/۹۰) حاصل از تئوری RHOST12 با حل دقیق و تئوری مرتبه بالای موجود در مرجع [۱۹]، در جدول (۳) برای نسبت‌های مختلف a/r_x و h/a مورد مقایسه قرار گرفته است. مشاهدات نشان می‌دهد که با افزایش نسبت h/a و افزایش نسبت a/r_x پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. در تمامی موارد تئوری مرتبه بالای حاضر از تئوری PSDT مرجع [۱۹] دارای دقت بالاتری است. همچنین در هر دو جدول مشخص است که تئوری‌های مرتبه بالا مقادیر فرکانسی بالاتری را در مقایسه با حل دقیق سه‌بعدی نشان می‌دهند.

از دیگر موارد قابل ملاحظه این است که در بسیاری از موارد فرکانس‌های مربوط به پوسته با لایه‌های (۰/۹۰) مقادیر کمتری نسبت به پوسته تک لایه همگن و با همان ابعاد دارند و این به دلیل آن است که در یک ضخامت معین در پوسته تک لایه، دو برابر دولایه (۰/۹۰) الیاف صفر درجه وجود دارد و به جهت تأثیر مستقیم آن‌ها در سفتی و درنتیجه فرکانس طبیعی مقادیر بالاتری در تک لایه مشاهده می‌شود.

همچنین در یک نسبت h/a و a/r_x خاص درصد اختلاف بین تئوری RHOST12 و حل دقیق در حالت کامپوزیت دولایه نسبت به حالت تک لایه همگن کمتر است. به‌طوری‌که به‌عنوان مثال در نسبت‌های $h/a = 0.05$ و $a/r_x = 1$ در حالت تک لایه همگن درصد اختلاف با حل دقیق برای تئوری RHOST12 و PSDT به ترتیب برابر با ۲/۷۵٪ و ۵/۸۷٪ است و در همین شرایط برای حال دولایه (۰/۹۰) این اختلاف به ترتیب به ۱/۰۸٪ و ۲/۱۳٪ تقلیل پیدا می‌کند.

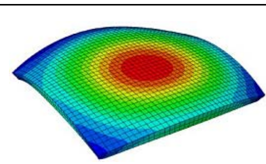
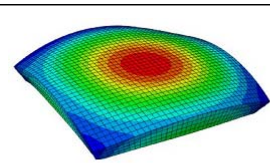
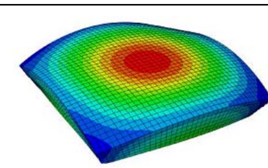
جدول ۲– مقایسه پارامتر فرکانس برای پوسته دو انحنائی تک لایه همگن بین تئوری‌های مختلف و به ازای مقادیر متفاوت h/a, a/r_x

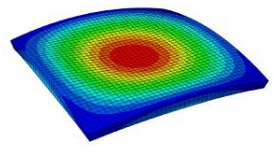
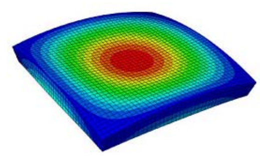
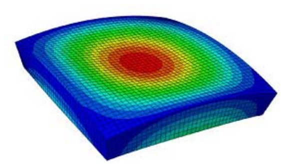
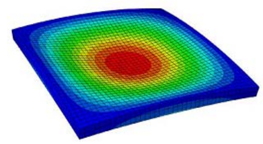
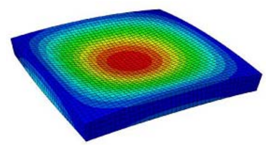
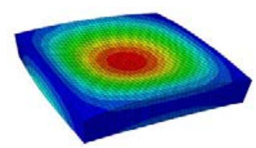
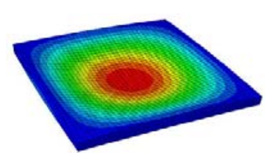
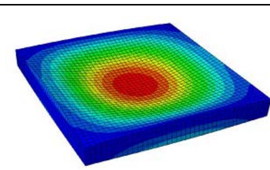
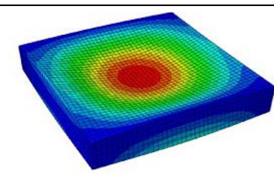
a/r_x	Theory	h/a = 0.05		h/a = 0.1		h/a = 0.15	
۱	[۱۹]3-D	۱/۲۱۴۰۳	۰,۰۰	۱/۴۲۸۷۲	۰,۰۰	۱/۶۰۰۴۱	۰,۰۰
	RHOST12	۱/۲۴۷۴	۲/۷۵	۱/۵۱۱۵۷	۵/۸	۱/۷۱۷۹۲	۷/۳۴
	[۱۹]PSDT	۱/۲۸۵۲۵	۵/۸۷	۱/۶۰۵۳۸	۱۲/۳۶	۱/۹۸۳/۸۴	۱۵/۵۸
	FEM	۱/۱۸۶۱۳	-۲/۳	۱/۴۴۲۴۹	۰/۹۶	۱/۶۴۳۸۶	۲/۷۱
							
۰/۵	[۱۹]3-D	۰/۸۷۷۰۲	۰/۰۰	۱/۲۹۲۹۵	۰,۰۰	۱/۵۸۰۶۸	۰/۰۰
	RHOST12	۰/۸۹۱۷۸	۱/۶۸	۱/۳۲۲۱۱	۲/۲۶	۱/۶۱۸۴۷	۲/۳۹
	[۱۹]PSDT	۰/۹۰۶۹۷	۳/۴۱	۱/۳۵۳۰۲	۴/۶۵	۱/۶۵۸۸۸	۴/۹۵
	FEM	۰/۸۸۴۷۹	۰/۸۹	۱/۳۱۳۳۷	۱/۵۸	۱/۶۰۸۳۶	۱/۷۵

							
۰/۲۵	[۱۹]3-D	۰/۷۶۱۱۱	۰/۰۰	۱/۲۵۸۵۹	۰،۰۰	۱/۵۸۲۷۹	۰/۰۰
	RHOST12	۰/۷۶۵۹۹	۰/۶۴	۱/۲۶۶۶	۰/۶۴	۱/۵۹۲۳۱	۰/۶
	[۱۹]PSDT	۰/۷۷۰۴۹	۱/۲۳	۱/۲۷۴۴۵	۱/۲۶	۱/۶۰۱۹۶	۱/۲۱
	FEM	۰/۷۵۸۵	-۰/۳۴	۱/۲۵۴۱۲	-۰/۳۶	۱/۵۷۷۵۸	-۰/۳۳
							
۰/۱	[۱۹]3-D	۰/۷۲۴۶	۰/۰۰	۱/۲۴۸۹۶	۰،۰۰	۱/۵۸۳۹۶	۰/۰۰
	RHOST12	۰/۷۲۵۹	۰/۱۸	۱/۲۵۰۷۱	۰/۱۴	۱/۵۸۴۹۳	۰/۰۶
	[۱۹]PSDT	۰/۷۲۶۵۴	۰/۲۷	۱/۲۵۰۹۴	۰/۱۶	۱/۵۸۵۲	۰/۰۸
	FEM	۰/۷۲۱۳۷	-۰/۴۵	۱/۲۴۲۸۱	-۰/۴۹	۱/۵۷۵۹۴	-۰/۵۱
							

*درصد تفاوت: ۱۰۰× ([۱۹] /([۱۹]—تئوری مورد بررسی))

جدول ۳– مقایسه پارامتر فرکانس برای پوسته دو انحنائی دولایه (۰/۹۰) بین تئوری‌های مختلف و به ازای مقادیر متفاوت h/a, a/r_x

a/r_x	Theory	h/a=0.05		h/a=0.1		h/a=0.15	
۱	3-D	۱/۲۹۸۳۵	۰/۰۰	۱/۳۹۹۷۴	۰/۰۰	۱/۵۱۹۳۶	۰
	RHOST12	۱.۳۱۲۳۱	۱/۰۸	۱/۴۴۶۶۲	۳/۳۵	۱/۶۰۴۱۸	۵/۵۸
	PSDT	۱/۳۲۵۹۵	۲/۱۳	۱/۴۹۰۷۵	۶/۵	۱/۶۸۱۴۱	۱۰/۶۷
	FEM	۱/۳۴۳۵۹	۳/۴۸	۱/۴۶۱۰۲	۴/۳۸	۱/۵۹۲۰۳	۴/۷۸
							
۰/۵	3-D	۰/۷۹۵۷۷	۰/۰۰	۱/۰۵۵۲۸	۰/۰۰	۱/۳۱۱۱۱	۰/۰۰
	RHOST12	۰/۸۰۳۴۸	۰/۹۷	۱/۰۷۷۳۳	۲/۰۹	۱/۳۴۷۹۹	۲/۸۱
	PSDT	۰/۸۱۰۵۹	۱/۸۶	۱/۰۹۷۰۸	۳/۹۶	۱/۳۸۰۸۳	۵/۳۲
	FEM	۰/۸۰۱۷۳	۰/۷۵	۱/۰۷۰۲۷	۱/۴۲	۱/۳۳۴۱	۱/۷۵

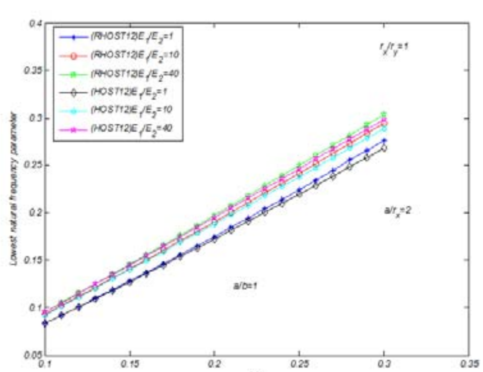
a/r_x	Theory	h/a=0.05		h/a=0.1		h/a=0.15	
							
۰/۲۵	3-D	۰/۵۷۴۱۹	۰/۰۰	۰/۹۳۶۳۷	۰/۰۰	۱/۲۵۰۳۲	۰/۰۰
	RHOST12	۰/۵۷۷۵۸	۰/۵۹	۰/۹۴۵۴۹	۰/۹۷	۱/۲۶۶۵۹	۱/۳
	PSDT	۰/۵۸۰۳۸	۱/۰۸	۰/۹۵۳۰۶	۱/۷۸	۱/۲۸۰۹۲	۲/۴۵
	FEM	۰/۵۷۲۸۳	-۰/۲۴	۰/۹۳۳۱۱	-۰/۳۵	۱/۲۴۶۰۱	-۰/۳۴
							
۰/۱	3-D	۰/۴۹۱۲۷	۰/۰۰	۰/۸۹۹۱۲	۰/۰۰	۱/۲۳۲۴۹	۰/۰۰
	RHOST12	۰/۴۹۲۶۹	۰/۲۹	۰/۹۰۳۶۳	۰/۵	۱/۲۴۲۰۷	۰/۷۸
	PSDT	۰/۴۹۳۶۱	۰/۴۴	۰/۹۰۶۷۹	۰/۸۵	۱/۲۵۰۳۴	۱/۴۵
	FEM	۰/۴۸۹۴۹	-۰/۳۶	۰/۸۹۴۷۸	-۰/۴۸	۱/۲۲۶۲۸	-۰/۵
							

شایان ذکر است که در تمامی شکل‌های این بخش پارامتر فرکانسی به‌صورت زیر انتخاب شده است:

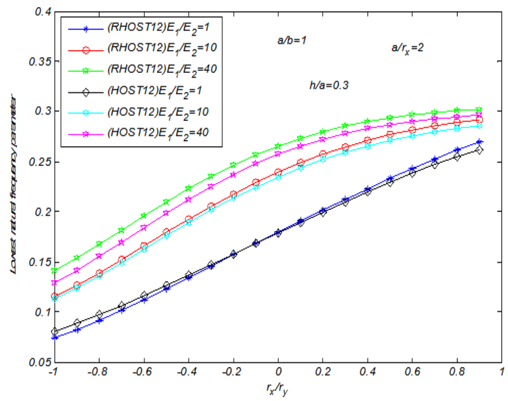
$$\bar{\omega} = \omega \frac{a}{b}\sqrt{\rho \square^2/G_{12}} \qquad (۵۴)$$

شکل (۵) تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی را برحسب نسبت ضخامت به طول h/a به ازای $a/b = 1$، $r_x/r_y = 1$ و $a/r_x = 2$ برای نسبت‌های ارتوتروپی $E_1/E_2 = 1,\ 10,\ 40$ نمایش می‌دهد. نتایج در این شکل برای دو تئوری HOST12 و RHOST12 محاسبه شده‌اند. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، پارامتر فرکانسی با افزایش h/a با شیبی یکنواخت به ازای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی افزایش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که پارامتر فرکانسی با افزایش نسبت ارتوتروپی مقدار بالاتری به خود می‌گیرد.

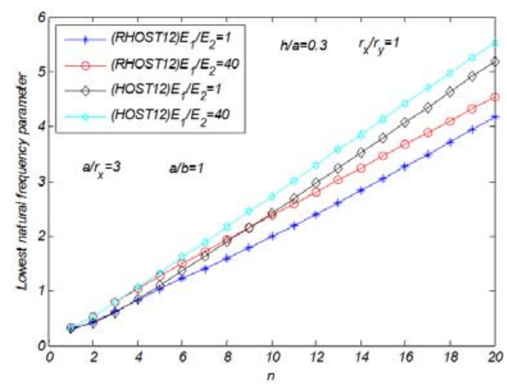
تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب r_x/r_y و به ازای $a/b = 1$، $a/r_x = 2$ و $h/a = 0.3$ برای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی E_1/E_2 در شکل (۶) مورد بررسی قرار گرفته است. اختلاف بین دو تئوری HOST12 و RHOST12 در نسبت $E_1/E_2 = 40$ به‌وضوح دیده می‌شود. شیب تغییرات پارامتر فرکانسی از $r_x/r_y = -1$ ابتدا روند افزایشی دارد و بعد از عبور از $r_x/r_y = 0$ نرخ افزایش کم می‌شود. در شکل (۷) تغییرات پارامتر فرکانسی برحسب شماره مود (n) و به ازای $h/a = 0.3$، $a/b = 1$، $r_x/r_y = 1$ و $a/r_x = 3$ ترسیم شده است. شکل نشان می‌دهد که برای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی با افزایش شماره مود پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. ضمن اینکه در شماره مودهای بالاتر درصد اختلاف بین دو تئوری HOST12 و RHOST12 بیشتر می‌گردد.



شکل ۵- تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت h/a برای نسبت‌های ارتوتروپی مختلف

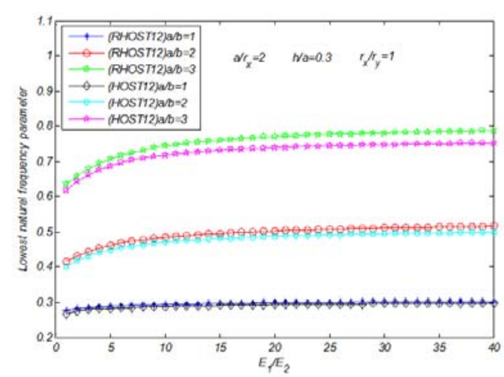


شکل ۶- تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت r_x/r_y برای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی

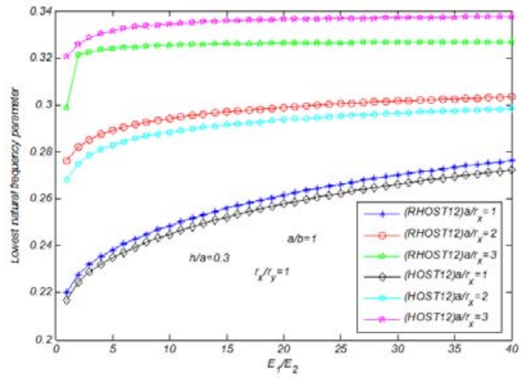


شکل ۷- تغییرات پارامتر فرکانسی برحسب شماره مودهای محیطی مختلف و به ازای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی

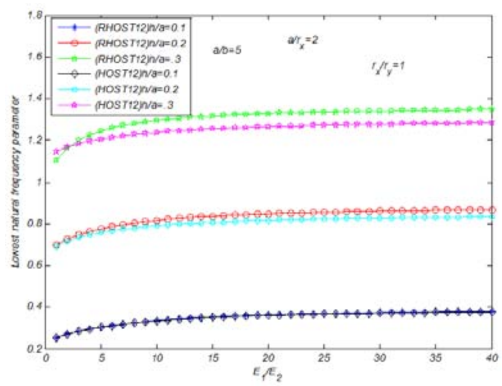
شکل‌های (۸، ۹ و ۱۰) تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی را برحسب تغییرات نسبت ارتوتروپی E_1/E_2 و به ترتیب برای مقادیر مختلف نسبت‌های a/b، a/r_x و h/a نشان می‌دهند. تمامی شکل‌ها گویای این نکته است که با افزایش نسبت ارتوتروپی تغییرات پارامتر فرکانسی کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۸- تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت E_1/E_2 برای نسبت‌های a/rx

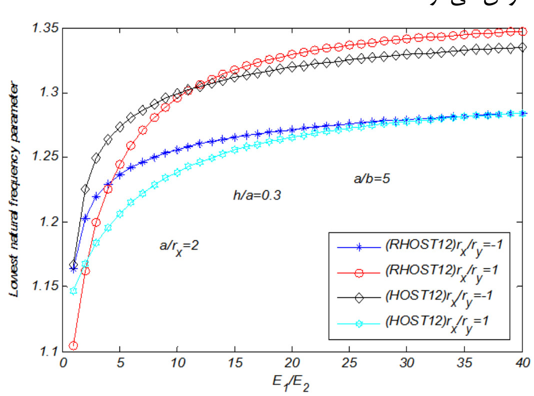


شکل ۹- تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت E1/E2 برای نسبت‌هایa/b



شکل ۱۰- تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت E1/E2 برای نسبت‌های h/a

در شکل (۱۱) تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت ارتوتروپی و به ازای $a/b = 5$، $a/r_x = 2$ و $h/a = 0.3$ برای $r_x/r_y = -1{,}1$ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود به ازای نسبت‌های ارتوتروپی کمتر از ۴ پارامتر فرکانسی در $r_x/r_y = 1$ کمتر از $r_x/r_y = -1$ است، ولی بعد از آن این روند معکوس می‌گردد.



شکل ۱۱- تغییرات کوچک‌ترین پارامتر فرکانسی برحسب نسبت E1/E2 برای نسبت‌های r_x/r_y

پوسته‌های مشبک دو انحنائی

همان‌طور که قبلاً گفته شد به دلیل تفاوت در خواص ریب‌ها و مواد پرکننده می‌بایست توسط یک تابع توزیع، این عدم یکنواختی موجود در سفتی و جرم پوسته مشبک را در محاسبات وارد کرد که این امر توسط تابع پله‌ای هویساید انجام گرفت، سپس با به دست آوردن ماتریس‌های سفتی و جرم، فرکانس‌های طبیعی استخراج شد.

با توجه به اطلاع نویسنده بر عدم وجود پژوهش متناظر برای صحه‌گذاری ناگزیر مقادیر به‌دست آمده از تئوری حاضر با نتایج حل عددی مقایسه شد.

پوسته مشبک با ریب‌های ایزوتروپیک

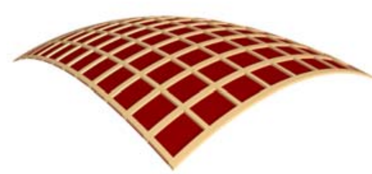
در این قسمت خواص ریب‌ها به‌صورت ایزوتروپیک $(\nu = 0.3)$ درنظر گرفته می‌شود. همچنین ابعاد پوسته مشبک بر حسب میلی متر به‌صورت زیر است:

$$a \times b = 120 \times 120$$
$$r_x = r_y = 200$$
$$\square = 6$$
$$\square_{rx} = \square_{ry} = 1.9$$
$$\square_{bx} = \square_{by} = 4$$

در ابتدا برای اینکه اثر ابعاد حفره‌ها در یک پوسته دو انحنائی بر پاسخ‌های دریافتی از اعمال تئوری پوسته اطلاع حاصل شود، در پوسته‌ای با ابعاد مشخص حفره‌هایی با ابعاد متفاوت ایجاد شده و نتایج حاصل از حل عددی با نتایج به دست آمده از تئوری حاضر در جدول (۴) مقایسه شده‌اند.

مطابق با نتایج به دست آمده درصد اختلاف بین تئوری RHOST12 و تحلیل المان محدود برای نسبت ابعاد ۰/۰۶۲برابر با ۲/۳۲٪ و برای نسبت ابعاد ۰/۱۷ برابر با ۱۷/۸٪ خواهد بود.

حل عددی با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس انجام پذیرفت. المان استفاده شده در تحلیل، از نوع ۲۰ گره‌ای (C3D20R) می‌باشد. در شکل (۱۲) ریب‌ها و مواد پرکننده با رنگ متفاوت در نرم‌افزار آباکوس نشان داده شده است.



شکل ۱۲- پوسته مشبک دو انحنائی مدل‌سازی شده در نرم‌افزار کتیا

در این قسمت به‌منظور بررسی اثر نسبت چگالی پرکننده به چگالی ریب و مدول یانگ پرکننده به مدول یانگ ریب بر دقت نتایج، حفره‌ای با ابعاد ۵۰×۵۰ بر روی پوسته با ابعاد ۱۲۰×۱۲۰، به‌عنوان ناحیه مربوط به مواد پرکننده در نظر گرفته می‌شود.

فرکانس طبیعی برای نسبت‌های مختلف چگالی ماده پرکننده به چگالی ریب در جدول (۵) ارائه شده است. در این جدول که $\frac{E_{bay}}{E_{rib}} = 1$ است، نتایج نشان می‌دهد که کاهش نسبت $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$ افزایش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت. همچنین با کاهش این نسبت و نزدیک شدن آن به صفر درصد اختلاف بین نتایج حل عددی و تئوری حاضر افزایش خواهد یافت.

در جدول (۶) فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف نسبت مدول یانگ ماده پرکننده به مدول یانگ ریب آمده است. در این جدول $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}} = 1$ است و همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش نسبت $\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$ فرکانس طبیعی نیز با کاهش مواجه خواهد شد.

اکنون به‌منظور بررسی تأثیر افزایش تعداد خانه‌ها بر پاسخ‌های حاصله، تعداد خانه‌ها به ۱۵×۱۵ افزایش داده می‌شود. فرکانس طبیعی برای نسبت‌های مختلف چگالی ماده پرکننده به چگالی ریب در جدول (۷) ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهد که کاهش نسبت $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$ افزایش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت.

در جدول (۸) فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف نسبت مدول یانگ ماده پرکننده به مدول یانگ ریب آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش نسبت $\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$ فرکانس طبیعی نیز کاهش خواهد یافت.

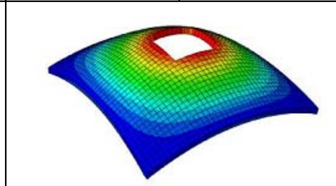
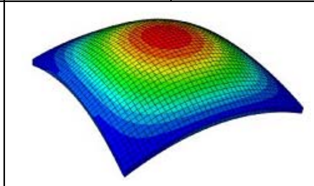
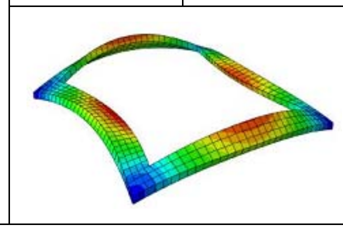
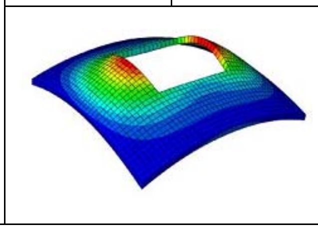
پوسته مشبک با ریب‌های ارتوتروپیک

به‌منظور بررسی پوسته مشبک با ریب‌های ارتوتروپیک، در این قسمت پوسته‌ای با خواص ماده زیر در نظر گرفته می‌شود و اثر نسبت ارتوتروپی در سه مود ابتدایی بین نتایج تئوری حاضر و حل عددی مقایسه می‌شود.

$$\frac{E_{bay}}{E_{rib1}} = 1$$
$$\nu_{bay} = \nu_{rib} = 0.25$$
$$\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib1}} = \frac{\rho_{rib1}}{\rho_{rib2}} = 1$$

جدول ۴ – مقایسه تأثیر ابعاد حفره در پوسته دو انحنائی بر فرکانس طبیعی

فرکانس طبیعی(HZ) (m,n)=(1,1)		ابعاد حفره / ابعاد کل پوسته	فرکانس طبیعی(HZ) (m,n)=(1,1)		ابعاد حفره / ابعاد کل پوسته
تئوری ارائه شده	تحلیل المان محدود		تئوری ارائه شده	تحلیل المان محدود	
۰/۰۰۰۸۸۴	۰/۰۰۰۸۶۸	۰/۰۶۲	۰/۰۰۰۸۲۲	۰/۰۰۰۸۸۶	بدون حفره

فرکانس طبیعی(HZ) (m,n)=(1,1)		ابعاد حفره / ابعاد کل پوسته	فرکانس طبیعی(HZ) (m,n)=(1,1)		ابعاد حفره / ابعاد کل پوسته
تئوری ارائه شده	تحلیل المان محدود		تئوری ارائه شده	تحلیل المان محدود	
					
۰/۰۰۰۷۹۲	۰/۰۰۰۹۲۸		۰/۰۰۰۹۹۷	۰/۰۰۰۸۴۶	
		۰/۶۹			۰/۱۷

جدول ۵- مقایسه فرکانس طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته دو انحنایی با یک حفره و به ازای نسبت‌های مختلف ρ_{bay}/ρ_{rib}

$\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$	فرکانس طبیعی (HZ) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
۱	۰/۰۰۰۸۸۶	۰/۰۰۰۸۲۲	۷/۲۲
۰/۹	۰/۰۰۰۸۹	۰/۰۰۰۸۴۴	-۵/۱۷
۰/۸	۰/۰۰۰۸۹۵	۰/۰۰۰۸۶۷	-۳/۱۳
۰/۵	۰/۰۰۰۹۰۹	۰/۰۰۰۹۵۲	۴/۷۳
۰/۳	۰/۰۰۰۹۱۸	۰/۰۰۱۰۲۵	۱۱/۶۶
۰/۱	۰/۰۰۰۹۲۷	۰/۰۰۱۱۱۸	۲۰/۶
۰	۰/۰۰۰۹۳۱	۰/۰۰۱۱۷۵	۲۶/۲۱

جدول ۶- مقایسه فرکانس طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته دو انحنائی با یک حفره و به ازای $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}=\mathbf{1}$ و نسبت‌های مختلف E_{bay}/E_{rib}

$\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$	فرکانس طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
۱	۰/۰۰۰۸۸۶	۰/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
۰/۹	۰/۰۰۰۸۸۴	۰/۰۰۰۸۱۹	-۷/۳۵
۰/۸	۰/۰۰۰۸۸۱	۰/۰۰۰۸۱۵	۷/۴۹
۰/۵	۰/۰۰۰۸۷۱	۰/۰۰۰۸۰۴	-۷/۶۹
۰/۳	۰/۰۰۰۸۵۹	۰/۰۰۰۷۹۸	-۷/۱
۰/۱	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۰۰۷۴۴	-۸/۱۵
۰/۰۱	۰/۰۰۰۷۷۶	۰/۰۰۰۷۳۵	-۵/۲۸

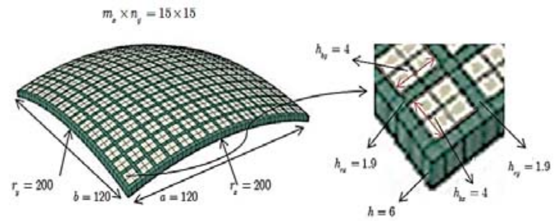
جدول ۷- مقایسه فرکانس طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته مشبک دو انحنائی و به ازای $\frac{E_{bay}}{E_{rib}}=\mathbf{1}$ و نسبت‌های مختلف ρ_{bay}/ρ_{rib}

$\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$	فرکانس طبیعی(Hz) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
۱	۰/۰۰۰۸۸۶	۰/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
۰/۹	۰/۰۰۰۹۱۳	۰/۰۰۰۸۴۶	-۷/۳۴
۰/۸	۰/۰۰۰۹۴۲	۰/۰۰۰۸۷۴	-۷/۲۲
۰/۵	۰/۰۰۱۰۵۱	۰/۰۰۰۹۷۴	-۷/۳۳
۰/۳	۰/۰۰۱۱۵	۰/۰۰۱۰۶۱	-۷/۷۴
۰/۱	۰/۰۰۱۲۸۲	۰۰۱۱۸۲	-۷/۸
۰	۰/۰۰۱۳۶۷	۰/۰۰۱۲۶۱	-۷/۷۵

جدول ۸- مقایسه فرکانس طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته مشبک دو انحنائی و به ازای نسبت‌های مختلف E_{bay}/E_{rib}

$\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$	فرکانس طبیعی (HZ) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
۱	۰/۰۰۰۸۸۶	۰/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
۰/۹	۰/۰۰۰۸۶	۰/۰۰۰۸۰۲	-۶/۷۴
۰/۸	۰/۰۰۰۸۳۱	۰/۰۰۰۷۸۱	-۶/۰۲
۰/۵	۰/۰۰۰۷۲۲	۰/۰۰۰۷۱۳	-۱/۲۵
۰/۳	۰/۰۰۰۶۱۵	۰/۰۰۰۶۶۶	۸/۲۹
۰/۱	۰/۰۰۰۴۲۴	۰/۰۰۰۶۰۷	۴۳/۱۶

همچنین ابعاد پوسته مشبک نیز به‌صورت شکل (۱۳) است:



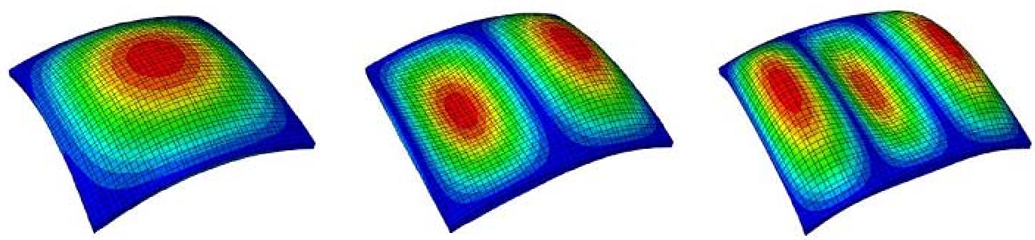
شکل۱۳– نمایش پارامترهای هندسی بر روی پوسته

در جدول (۹) که برخلاف موارد قبلی جنس ریب‌ها ارتوتروپیک است، سه مود ابتدایی برای نسبت‌های ارتوتروپی مختلف بین نتایج حاصل از تئوری حاضر و حل به کمک المان محدود باهم مقایسه شده‌اند.

نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ارتوتروپی و افزایش شماره مود، فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا می‌کند.

جدول ۹– مقایسه فرکانس طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته مشبک دو انحنائی و به ازای نسبت‌های مختلف $\boldsymbol{E_{rib1}/E_{rib2}}$

E_{rib1}/E_{rib2}	فرکانس طبیعی (Hz)(m=1)								
	n=۱			n=۲			n=۳		
	FEM	تئوری حاضر	درصد اختلاف	FEM	تئوری حاضر	درصد اختلاف	FEM	تئوری حاضر	درصد اختلاف
۱	۰/۰۰۰۸۶۶	۰/۰۰۰۸۲۲	-۵/۰۸	۰/۰۰۰۹۸۶	۰/۰۰۱۰۱۳	۲/۷۴	۰/۰۰۱۳۹	۰/۰۰۱۴۹۳	۷/۴۱
۲	۰/۰۰۰۸۸۵	۰/۰۰۰۸۳۹	-۵/۲	۰/۰۰۱۰۲۶	۰/۰۰۱۰۲۴	-۰/۱۹	۰/۰۰۱۴۶۵	۰/۰۰۱۵۰۱	۲/۴۶
۳	۰/۰۰۰۹۰۱	۰/۰۰۰۸۵۵	-۵/۱۱	۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۰۱۰۳۵	-۲/۳۶	۰/۰۰۱۵۳	۰/۰۰۱۵۰۹	-۱/۳۷
۴	۰/۰۰۰۹۱۵	۰/۰۰۰۸۷۲	-۴/۷	۰/۰۰۱۰۸۹	۰/۰۰۱۰۴۶	-۳/۹۵	۰/۰۰۱۵۸۶	۰/۰۰۱۵۱۷	-۴/۳۵
۱۰	۰/۰۰۰۹۷	۰/۰۰۰۹۵۲	۸	۰/۰۰۱۲۱۷	۰/۰۰۱۱۰۱	-۹/۵۳	۰/۰۰۱۸۴۳	۰/۰۰۱۵۶۱	-۱۵/۳



نتیجه‌گیری

در پوسته‌های کامپوزیتی با دو انحناء، مشاهده می‌شود که در ابتدا با افزایش نسبت ارتوتروپی E_1/E_2 پارامتر فرکانسی به ازای $r_x/r_y = 1$ مقادیر بالاتری را نسبت به $r_x/r_y = -1$ دارد و بعد از آن پارامتر فرکانسی در $r_x/r_y = 1$ کمتر از $r_x/r_y = -1$ می‌گردد. همچنین در این پوسته‌ها با افزایش h/a و a/r_x پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد.

همواره ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت ارتوتروپی E_1/E_2 پارامتر فرکانسی افزایش پیدا می‌کند و در نسبت‌های بالاتر این تغییرات کاهش می‌یابد.

در مورد پوسته‌های مشبک مشخص شد که با افزایش نسبت ابعادی حفره به ابعاد کل پوسته نتایج حاصل از تئوری حاضر و حل عددی اختلاف زیادی باهم پیدا می‌کنند و این نشان می‌دهد که تئوری مذکور که اصولاً یک تئوری پوسته است، در محدوده مشخصی قادر به پاسخگویی در سازه مشبک است.

مشاهدات در مورد پوسته‌های مشبک، گویای این مطلب است که با افزایش نسبت تعداد خانه‌ها در آن‌ها نسبت به‌کل پوسته، دقت تئوری حاضر در مقایسه با حل عددی بالاتر می‌رود و بنابراین در استفاده از این تئوری، این نکته باید مدنظر قرار گیرد.

در پوسته‌های مشبک با ریب‌هایی با جنس غیرهمسانگرد، مشاهده شد که با افزایش نسبت ارتوتروپی فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند؛ به‌علاوه با افزایش شماره مودها نیز این افزایش مشاهده می‌شود.

تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافعی توسط نویسندگان بیان نشده است.

مراجع

[1] C. Omid'Varan, "Free vibration of grid-stiffened plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 19, No. 4, pp. 463-472, 1971.

[2] C. Omid'Varan, and W. Delagarza, "Vibration of monolithic grid-stiffened plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 26, No .1 ,pp. 21-28, 1973.

[3] R.K. Khare, V. Rode, A.K. Garg, and S.P. John, "Higher-order closed-form solutions for thick laminated sandwich shells." *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 7, No. 4, pp. 335-358, 2005.

[4] M. Toorani, and A. Lakis, "Free vibrations of non-uniform composite cylindrical shells." *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 236, No. 17, pp. 1748-1758, 2006.

[5] C.K. Kundu and J.H. Han, "Vibration characteristics and snapping behavior of hygro-thermo-elastic composite doubly curved shells." *Composite Structures*, Vol. 91, No. 3, pp. 306-317, 2009.

[6] S. Chorfi and A. Houmat, "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form." *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2573-2581, 2010.

[7] K. Sayad, "Analytical study of the effect of shear between the layers on the local buckling of a polymer composite lattice cylinder under compressive axial load." *10th Conference of Iranian Aerospace Society, Iranian Aerospace Society*, 2010 (in Persian).

[8] J. Mantari and C.Guedes Soares, "Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory." *Composite Structures*, Vol. 94, No. 8, pp. 2640-2656, 2012.

[9] P. Edalata, M.R. Khedmati and C.G. Soares, "Free vibration and dynamic response analysis of stiffened parabolic shells using equivalent orthotropic shell parameters." *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, No. 4, pp. 747-766, 2013.

[10] S.S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, *2007.*

[11]K. Liew and C. Lim, "A higher-order theory for vibration of doubly curved shallow shells." *Journal of applied mechanics*, Vol. 63, No. 3, pp. 587-593, 1996.

[12]A.K. Garg, R.K. Khare, and T. Kant, "Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and sandwich shells." *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 205-235, 2006.

[13]C.W. Bert, "Structural theory for laminated anisotropic elastic shells." *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, No. 4, pp. 414-423, 1967.

[14]A. Leissa and J.-D. Chang, "Elastic deformation of thick, laminated composite shells." *Composite structures*, Vol. 35, No. 2, pp. 153-170, 1996.

[15]J. Ye and K. Soldatos, "Three-dimensional vibration of laminated cylinders and cylindrical panels with symmetric or antisymmetric cross-ply lay-up. *Composites Engineering*," Vol. 4, No. 4, pp. 429-444, 1994.

[16]M.S. Qatu, *Vibration of laminated shells and plates*: Elsevier, 2004.

[17]J.N. Reddy, *Energy principles and variational methods in applied mechanics*: John Wiley & Sons, 2002.

[18]G. Li and J. Cheng, A generalized analytical modeling of grid stiffened composite structures. *Journal of Composite Materials*, Vol. 41, No. 24, pp. 2939-2969, 2007.

[19]A.Bhimaraddi, "Free vibration analysis of doubly curved shallow shells on rectangular planform using three-dimensional elasticity theory." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 7, pp. 897-913, 1991.

[20]M. Zarei, G.H. Rahimi, M. Hemmatnezhad, "Free vibrational characteristics of grid-stiffened truncated composite conical shells," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 99, 2020, 105717.

[21]T. Liu, Zh. Min Li, P. Qiao, S. Jin, "A novel C1 continuity finite element based on Mindlin theory for doubly-curved laminated composite shells," *Thin-Walled Structures,* Vol. 167, 2021, 108155.

[22]M. Qatu, "Theory and vibration analysis of laminated barrel thin shells," *Journal of Vibration and Control* , pp.851-889, 1999.