

معادلات هدایت ضمنی در مختصات قطبی

سید حمید جلالی نائینی^۱

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

تهران، کد پستی: ۱۴۱۱۷-۱۳۱۱۶

shjalalinaini@modares.ac.ir

در این تحقیق، معادلات هدایت ضمنی در مختصات قطبی استخراج شده است. بر حسب کاربرد، ممکن است استفاده از هدایت ضمنی در مختصات قطبی بر معادلات هدایت ضمنی در مختصات دکارتی ترجیح داده شود. همچنین بر حسب نوع مسئله، ممکن است استخراج روابط تحلیلی برای ماتریس حساسیت با استفاده از مختصات قطبی آسان تر باشد؛ لذا استخراج این روابط در مختصات قطبی و تبدیل روابط به مختصات دکارتی می تواند مفید باشد. در ادامه نیز نتایج حل به مختصات استوانه ای تعمیم داده شده است.

واژه های کلیدی: هدایت ضمنی، سرعت لازم، ماتریس حساسیت

بردار سرعت لازم به طور صریح محاسبه می شود؛ اما در هدایت ضمنی، اختلاف بردار سرعت فضاییما از بردار سرعت لازم از طریق معادله دیفرانسیل برداری حاصل می شود. در ابتدا، به علت بار محاسباتی هدایت صریح، روش هدایت ضمنی مورد توجه بوده است؛ اما با ظهور ریزپردازنده های سریع، روش های صریح گسترش روزافزونی یافته اند. بنابر استفاده از سیستم ناوبری اینرسی با صفحه پایدار یا با حساسه های متصل به بدنه، از معادله هدایت ضمنی در مختصات اینرسی یا مختصات بدنی استفاده می شود [۱-۶].

مفاهیم بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت در کاربردهای فضایی، مفاهیمی شناخته شده اند. بردار سرعت لازم اصطلاحاً بردار سرعتی فرضی برای رسیدن فضاییما به یک دسته شرایط نهایی در زمان نهایی از پیش معلوم است، در صورتی که موتور پیشران فضاییما خاموش بوده و تنها تحت تأثیر شتاب جاذبه حرکت کند. بر حسب این که شرایط نهایی چه باشد، مسئله متفاوت می شود. مشتق جزئی بردار سرعت لازم نسبت به بردار موقعیت فضاییما تحت عنوان ماتریس حساسیت تعریف می شود [۵]. از ابتدای توسعه هدایت ضمنی تاکنون تحقیقات زیادی انجام شده است که به طور نمونه می توان به مراجع [۷-۱۴] اشاره کرد.

حل تحلیلی مسئله بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای شرایط نهایی مختلفی در مراجع [۴] و [۵] موجود است که به طور نمونه عبارتند از: بردار سرعت لازم برای رسیدن به بردار

علائم و اختصارات

\mathbf{a}_T	بردار شتاب غیرجاذبه ای
C	ماتریس تبدیل مختصات
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_k$	بردارهای یکه مختصات استوانه ای
\mathbf{g}	بردار شتاب جاذبه
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	بردارهای یکه دستگاه مختصات دکارتی
Q	ماتریس حساسیت
R_e	شعاع زمین
\mathbf{r}	بردار موقعیت
r, θ	مختصات دستگاه قطبی
t	زمان
\mathbf{v}	بردار سرعت
\mathbf{V}_R	بردار سرعت لازم
V_r, V_θ	مؤلفه های سرعت در دستگاه قطبی
x, y, z	مختصات دستگاه دکارتی

مقدمه

قوانین هدایت مبتنی بر بردار سرعت لازم در کاربردهای فضایی به دو دسته هدایت صریح و ضمنی تقسیم می شود. در هدایت صریح،

۱. استادیار

نیروهای غیرجاذبه‌ای است. بردارهای مذکور نسبت به مختصات مرجع اینرسی (Oxy) که مرکز آن منطبق بر مرکز زمین فرض شده‌است، نوشته شده‌است. بردار سرعت لازم، بردار سرعتی است که در هر لحظه، تابع بردار موقعیت و زمان بوده و برای رسیدن به یک شرایط نهایی مفروض و تنها تحت اثر شتاب جاذبه تعریف می‌شود و با $\mathbf{V}_R(\mathbf{r}, t)$ نمایش داده می‌شود.

در اینجا معادله هدایت ضمنی در مختصات قطبی استخراج می‌شود. با تعریف $\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_R - \mathbf{v}$ و مشتق‌گیری از آن می‌توان نوشت [۵]:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_R}{dt} - (\mathbf{g} + \mathbf{a}_T) \quad (2)$$

سپس از بردار سرعت لازم نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{V}_R}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial t} \quad (3)$$

یا

$$\frac{d\mathbf{V}_R}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} v_r + \frac{\partial \mathbf{V}_R}{r \partial \theta} v_\theta + \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial t} \quad (4)$$

که در آن $v_r = \dot{r}$ و $v_\theta = r\dot{\theta}$ مؤلفه‌های سرعت فضایی در مختصات قطبی است.

حال برای هر نقطه در موقعیت $\mathbf{r}(t)$ و زمان t ، یک مسیر مرجع از این نقطه که شرایط نهایی را ارضاء کند، در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه بردار سرعت این نقطه همان بردار سرعت لازم بوده و مشتق آن بردار شتاب جاذبه می‌شود. بنابراین،

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \left. \frac{d\mathbf{V}_R}{dt} \right|_{\text{ref}} = \left. \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} \right|_{\text{ref}} v_r \Big|_{\text{ref}} + \left. \frac{\partial \mathbf{V}_R}{r \partial \theta} \right|_{\text{ref}} v_\theta \Big|_{\text{ref}} + \left. \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial t} \right|_{\text{ref}} \quad (5)$$

با توجه به توضیحات فوق می‌توان نتیجه گرفت که $v_r \Big|_{\text{ref}} = V_{Rr}$ و $v_\theta \Big|_{\text{ref}} = V_{R\theta}$. با توجه به اینکه بردار سرعت لازم تنها تابعی از بردار موقعیت در زمان t و همچنین زمان t است؛ بنابراین، مشتق جزئی آن (نسبت به زمان یا موقعیت) نیز حداکثر تابعی از همین کمیت‌هاست. از طرف دیگر چون این مشتقات جزئی تنها تابعی از زمان و موقعیت هستند، اگر برای دو یا چند نقطه بر روی مسیرهای متفاوت، زمان و بردار موقعیت آنها یکسان باشد، این مشتقات جزئی برای این نقاط برابر می‌شود. در نتیجه:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{V}_R(\mathbf{r}(t), t)}{\partial t} \right|_{\text{ref}} = \frac{\partial \mathbf{V}_R(\mathbf{r}(t), t)}{\partial t} \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{V}_R(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r} \right|_{\text{ref}} = \frac{\partial \mathbf{V}_R(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r} \quad (7)$$

موقعیت نهایی و زاویه مسیر نهایی از پیش تعیین، بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای رسیدن به مدار بیضی با قطر اطول و خروج از مرکز از پیش تعیین، بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت برای رسیدن به بردار موقعیت نهایی و قطر اطول از پیش تعیین، بردار سرعت لازم برای مسئله لامبرت (بردار موقعیت نهایی و زمان انتقال از پیش تعیین) و ماتریس حساسیت مربوطه. البته بر حسب این که شرایط نهایی چه باشد، ممکن است حل صریح وجود نداشته باشد. حل مسئله بردار سرعت لازم با قید بردار موقعیت به ازای زمان نهایی از پیش معلوم برای مدل زمین کروی که به مسئله لامبرت مشهور است، منجر به حل صریح نمی‌شود. بنابراین، بر حسب توان محاسباتی پردازشگر فضایی ما ممکن است از روش‌های تکرارپذیر، بازگشتی یا حل‌های تقریبی استفاده شود. بنابر اهمیت موضوع، تاکنون روش‌های متعددی برای حل مسئله لامبرت ارائه شده‌است که به‌طور نمونه می‌توان به مراجع [۱۹-۱۵] اشاره کرد. اخیراً حل مسئله لامبرت حداقل انرژی [۲۰] و بیان مسئله به‌صورت کنترل بهینه [۲۱] نیز ارائه شده‌است.

با ظهور ریزپردازنده‌های سریع، امکان استفاده از روابط تحلیلی برای ماتریس حساسیت بر حسب بردار موقعیت فضایی ما امکان‌پذیر شده‌است. با توجه به اینکه اکثر روابط دینامیک مدار بر حسب مختصات قطبی بیان می‌شود، استخراج روابط تحلیلی برای بردار سرعت لازم و ماتریس حساسیت در مختصات قطبی آسان‌تر به نظر می‌آید. لذا در این تحقیق، روابط تبدیل ماتریس حساسیت از مختصات قطبی به مختصات اینرسی به‌دست آمده است. مختصات قطبی مذکور در صفحه حرکت فضایی ما (با فرض قطع نیروی پیشران) تعریف می‌شود. معادلات منتج به‌راحتی قابل تعمیم به مختصات استوانه‌ای است. شایان ذکر است که اگرچه معادلات تبدیل هدایت ضمنی در دستگاه بدنی در منابع موجود است، اما محاسبه ماتریس حساسیت در آن در مختصات اینرسی انجام می‌شود؛ در صورتی که در مقاله حاضر با فرض موجود بودن ماتریس حساسیت در مختصات قطبی، روابط تبدیل آن برای انتقال به مختصات اینرسی به‌دست آمده‌است.

هدایت ضمنی

معادله حرکت فضایی ما که به‌صورت جرم نقطه‌ای P مدل شده‌است را در صفحه قائم به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_T \quad (1)$$

که در آن \mathbf{r} و \mathbf{v} به ترتیب بردار موقعیت و سرعت فضایی ما در زمان t و $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ بردار شتاب جاذبه و \mathbf{a}_T بردار شتاب ناشی از

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} - V_{g\theta}\dot{\theta} \\ \dot{V}_{g\theta} + V_{gr}\dot{\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} + \frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} \\ \dot{V}_{g\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} - \dot{\theta} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} + \dot{\theta} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} + \frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \end{bmatrix} \quad (19)$$

روابط تبدیل ماتریس حساسیت

با توجه به اینکه بر حسب نوع مسئله، ممکن است استخراج بردار سرعت لازم در مختصات قطبی آسان تر باشد؛ بنابراین، برای استفاده از آن در معادله هدایت ضمنی در مختصات دکارتی، نیاز به روابط تبدیل برای ماتریس حساسیت است. بنابراین، در اینجا با فرض موجود بودن مشتقات جزئی بردار سرعت در مختصات قطبی، ماتریس حساسیت در مختصات دکارتی استخراج می‌شود. استخراج روابط کلی در پیوست الف موجود است. با استفاده از روابط (۶۶) و (۶۷) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial x} = \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} \sin \theta \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial y} = \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} \cos \theta \quad (21)$$

همچنین با استفاده از روابط (۶۸) تا (۷۱) روابط زیر استخراج

می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{Rx}}{\partial x} &= \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{Rr}}{\partial \theta} - V_{R\theta} \right) \\ &\quad - \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{R\theta}}{\partial \theta} + V_{Rr} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{Ry}}{\partial x} &= \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{Rr}}{\partial \theta} - V_{R\theta} \right) \\ &\quad + \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{R\theta}}{\partial \theta} + V_{Rr} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{Rx}}{\partial y} &= \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{Rr}}{\partial \theta} - V_{R\theta} \right) \\ &\quad - \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} \sin^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{R\theta}}{\partial \theta} + V_{Rr} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{V}_R(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \theta} \right|_{\text{ref}} = \frac{\partial \mathbf{V}_R(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \theta} \quad (8)$$

لذا رابطه (۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} V_{Rr} + \frac{\partial \mathbf{V}_R}{r\partial\theta} V_{R\theta} + \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial t} \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (۴) و (۹) در رابطه (۲) و مرتب‌سازی عبارات آن می‌توان نوشت:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = - \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} (V_{Rr} - v_r) - \frac{\partial \mathbf{V}_R}{r\partial\theta} (V_{R\theta} - v_\theta) - \mathbf{a}_T \quad (10)$$

با توجه به اینکه عبارات داخل پرانتز در رابطه فوق همان مؤلفه‌های بردار \mathbf{V}_g در مختصات قطبی است؛ به عبارت دیگر $V_{gr} = V_{Rr} - v_r$ و $V_{g\theta} = V_{R\theta} - v_\theta$ ، بنابراین، رابطه (۱۰) به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = - \frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} V_{gr} - \frac{\partial \mathbf{V}_R}{r\partial\theta} V_{g\theta} - \mathbf{a}_T \quad (11)$$

در ادامه، باید عبارات مشتقات جزئی بردار سرعت لازم و مشتق بردار \mathbf{V}_g نسبت به زمان در رابطه اخیر را به دست آورد. در صورتی که بردار سرعت لازم بر حسب مؤلفه‌های خود در مختصات قطبی $(V_{Rr}, V_{R\theta})$ نوشته شود، با استفاده از روابط (۵۱) و (۵۲) می‌توان روابط زیر را استخراج کرد:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial r} = \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_R}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial V_{Rr}}{\partial \theta} - V_{R\theta} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial V_{R\theta}}{\partial \theta} + V_{Rr} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (13)$$

حال بردار \mathbf{V}_g را بر حسب مؤلفه‌های آن در مختصات قطبی $(V_{gr}, V_{g\theta})$ بنویسید و با استفاده از روابط $\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$ و $\dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{e}_r$ ، از آن نسبت به زمان مشتق بگیرید:

$$\mathbf{V}_g = V_{gr} \mathbf{e}_r + V_{g\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_g = (\dot{V}_{gr} - V_{g\theta}\dot{\theta}) \mathbf{e}_r + (\dot{V}_{g\theta} + V_{gr}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۵) در رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}_{gr} - V_{g\theta}\dot{\theta} = - \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} V_{gr} - \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} V_{g\theta} + \frac{V_{R\theta}}{r} V_{g\theta} - a_{Tr} \quad (16)$$

$$\dot{V}_{g\theta} + V_{gr}\dot{\theta} = - \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} V_{gr} - \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} V_{g\theta} - \frac{V_{Rr}}{r} V_{g\theta} - a_{T\theta} \quad (17)$$

که نمایش ماتریسی آنها به صورت رابطه (۱۸) یا (۱۹) است:

روش دوم استخراج هدایت ضمنی

در اینجا هدف این است که از معادله هدایت ضمنی در مختصات دکارتی، معادله هدایت ضمنی در مختصات قطبی استخراج شود. در حالت دوبعدی، معادله هدایت ضمنی در مختصات دکارتی به صورت زیر است [۵]:

$$\frac{d\mathbf{V}_g}{dt} = -Q_{Oxy} \mathbf{V}_g - \mathbf{a}_T \quad (31)$$

که در آن $\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_R - \mathbf{v}$ است. رابطه فوق بر حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rx}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Rx}}{\partial y} \\ \frac{\partial V_{Ry}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Ry}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gx} \\ V_{gy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tx} \\ a_{Ty} \end{bmatrix} \quad (32)$$

در صورتی که بردارهای یک‌ه مختصات قطبی در رابطه $\mathbf{v}_g = V_{gr} \mathbf{e}_r + V_{g\theta} \mathbf{e}_\theta$ بر حسب بردارهای یک‌ه مختصات دکارتی جایگزین شود، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{V}_g = (V_{gr} \cos \theta - V_{g\theta} \sin \theta) \mathbf{i} + (V_{gr} \sin \theta + V_{g\theta} \cos \theta) \mathbf{j} \quad (33)$$

بنابراین،

$$V_{gx} = V_{gr} \cos \theta - V_{g\theta} \sin \theta \quad (34)$$

$$V_{gy} = V_{gr} \sin \theta + V_{g\theta} \cos \theta \quad (35)$$

به‌طور مشابه، روابط تبدیل برای مؤلفه‌های بردار شتاب ناشی از نیروهای غیرجاذبه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_{Tx} = a_{Tr} \cos \theta - a_{T\theta} \sin \theta \quad (36)$$

$$a_{Ty} = a_{Tr} \sin \theta + a_{T\theta} \cos \theta \quad (37)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۳۴) و (۳۵) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}_{gx} = (\dot{V}_{gr} - V_{g\theta} \dot{\theta}) \cos \theta - (\dot{V}_{g\theta} + V_{gr} \dot{\theta}) \sin \theta \quad (38)$$

$$\dot{V}_{gy} = (\dot{V}_{gr} - V_{g\theta} \dot{\theta}) \sin \theta + (\dot{V}_{g\theta} + V_{gr} \dot{\theta}) \cos \theta \quad (39)$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gx} \\ \dot{V}_{gy} \end{bmatrix} = C_p^T(\theta) \begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} - V_{g\theta} \dot{\theta} \\ \dot{V}_{g\theta} + V_{gr} \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (40)$$

با جایگذاری روابط (۲۹)، (۳۴-۳۷) و (۴۰) در رابطه (۳۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial V_{Ry}}{\partial y} = \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{Rr}}{\partial \theta} - V_{R\theta} \right) + \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial V_{R\theta}}{\partial \theta} + V_{Rr} \right) \quad (25)$$

چهار رابطه اخیر، عناصر ماتریس حساسیت را تشکیل می‌دهد:

$$Q_{Oxy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rx}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Rx}}{\partial y} \\ \frac{\partial V_{Ry}}{\partial x} & \frac{\partial V_{Ry}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (26)$$

جمع دو عنصر روی قطر اصلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial V_{Rx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{Ry}}{\partial y} = \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_{R\theta}}{\partial \theta} + V_{Rr} \right) \quad (27)$$

همچنین تفاضل دو عنصر دیگر به صورت زیر است:

$$\frac{\partial V_{Ry}}{\partial x} - \frac{\partial V_{Rx}}{\partial y} = \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_{Rr}}{\partial \theta} - V_{R\theta} \right) \quad (28)$$

روابط (۲۲) تا (۲۵) به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$Q_{Oxy} = C_p^T(\theta) \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} + \frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} C_p(\theta) \quad (29)$$

که تعریف ماتریس تبدیل مختصات $C_p(\theta)$ در رابطه (۲۴) آمده است.

با توجه به رابطه (۸۴)، رابطه تبدیل (۲۹) در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر اصلاح می‌شود:

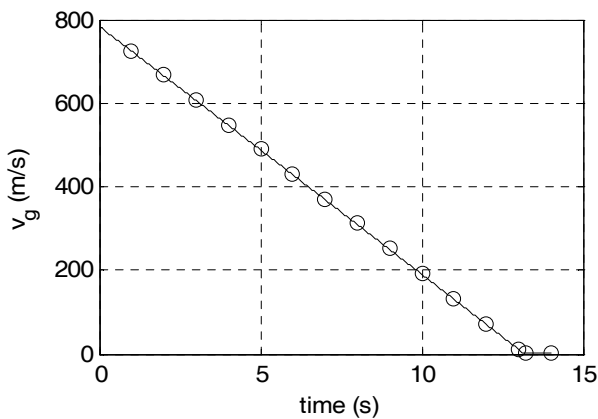
$$Q_{Oxyz} = C^T(\theta) \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} & \frac{\partial V_{Rz}}{\partial r} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} + \frac{V_{Rr}}{r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial V_{Rz}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rz}}{r\partial\theta} & \frac{\partial V_{Rz}}{\partial z} \end{bmatrix} C(\theta) \quad (30)$$

که در آن ماتریس تبدیل مختصات $C(\theta)$ در رابطه (۸۵) آمده است. شایان ذکر است که مختصات قطبی در صفحه حرکت فضاپیما (صفحه Oxy) منظور شده است. در تعمیم معادلات در مختصات قطبی به مختصات استوانه‌ای نیز محور سوم در مختصات استوانه‌ای (محور z) عمود بر صفحه حرکت و منطبق بر محور سوم مختصات دکارتی (محور z) منظور شده است.

$$Q_{Oxy} = - \begin{bmatrix} 50.3071 & 1.5272 \\ 1.5272 & 50.7081 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (45)$$

در این حالت، با محاسبه ماتریس حساسیت در مختصات قطبی و انتقال به مختصات دکارتی، همان رابطه (۴۵) حاصل می‌شود.

در مرحله بعد، به منظور صحت‌گذاری رابطه (۴۲) از شبیه‌سازی پرواز فضاپیما در صفحه قائم با فرض جرم نقطه‌ای و در مدل زمین کروی غیرچرخان استفاده شده‌است. سیستم کنترل موشک ایده‌آل فرض شده و اندازه شتاب ناشی از نیروی پیشران، ثابت و برابر ۶۰ متر بر مجذور ثانیه است. راستا و جهت نیروی پیشران در راستا و جهت بردار V_g اعمال شده‌است. موقعیت اولیه فضاپیما $(R_e + 100 \text{ km}, \pi/2)$ و سرعت اولیه آن در مختصات دکارتی $(5000 \quad 1000)^T$ اعمال شده‌است. هدف نیز در موقعیت $(R_e, \pi/3)$ فرض شده‌است. کل زمان پرواز نیز ۶۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده‌است. ابتدا هدایت Q در مختصات دکارتی شبیه‌سازی شده و شرط خاموشی موتور به صورت $V_g < 0.01$ اعمال شده‌است. نمودار V_g بر حسب زمان در شکل (۱) تا زمان اندکی پس از دستور قطع نیروی پیشران موتور که در زمان ۱۳/۲۱ ثانیه واقع شده‌است، با خط توپر ترسیم شده‌است. سپس شبیه‌سازی با معادلات هدایت Q در مختصات قطبی انجام شده و نتایج بر روی نمودار شکل (۱) با دوایر توخالی نمایش داده شده‌است که انطباق دو روش را با دقت بالایی نشان می‌دهد.



شکل ۱- نمودار V_g بر حسب زمان

تعمیم روش دوم

در تعمیم روش دوم، یک تبدیل مختصات سه‌بعدی در نظر گرفته می‌شود. ماتریس ستونی w را به صورت $w = C_I^w V_g$ در نظر بگیرید که در آن C_I^w ماتریس تبدیل از دستگاه مختصات اینرسی $(Oxyz)$ به دستگاه چرخان W است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$C_p^T(\theta) \begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} - V_{g\theta} \dot{\theta} \\ \dot{V}_{g\theta} + V_{gr} \dot{\theta} \end{bmatrix} = -C_p^T(\theta) \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r \partial \theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r \partial \theta} + \frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \end{bmatrix} - C_p^T(\theta) \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \end{bmatrix} \quad (41)$$

بنابراین، با پیش‌ضرب ماتریس $C_p(\theta)$ در رابطه اخیر، همان رابطه (۱۸) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} - V_{g\theta} \dot{\theta} \\ \dot{V}_{g\theta} + V_{gr} \dot{\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r \partial \theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r \partial \theta} + \frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \end{bmatrix} \quad (42)$$

یا

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} \\ \dot{V}_{g\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r \partial \theta} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_{R\theta}}{r} + \dot{\theta} \\ -\dot{\theta} & -\frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \end{bmatrix} \quad (43)$$

البته باید توجه داشت که استفاده از روش دوم هنوز مستلزم استفاده از رابطه تبدیل ماتریس حساسیت (۲۹) است. این موضوع در تعمیم روش دوم نیز مشهود و صادق است؛ در حالی که در روش اول، معادله هدایت ضمنی به‌طور مستقل به‌دست می‌آید.

در خصوص صحت‌گذاری روابط (۲۹) و (۴۲)، علاوه بر حل تحلیلی از دو روش، نتایج حل عددی نیز با دقت بسیار بالایی با حل تحلیلی منطبق شده‌است. برای این منظور، موقعیت هدف و فضاپیما را در مختصات قطبی به ترتیب به‌صورت $(R_e, \pi/2)$ و $(R_e, \pi/3)$ در نظر بگیرید که در آن شعاع زمین است. زمان باقیمانده تا هدف ۲۹۰ ثانیه منظور شده‌است. ماتریس حساسیت در مختصات دکارتی با استفاده از حل عددی به‌صورت زیر حاصل شده‌است:

$$Q_{Oxy} = - \begin{bmatrix} 33.0440 & 0.5819 \\ 0.5819 & 37.4023 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (44)$$

در صورتی که ماتریس حساسیت در مختصات قطبی به‌دست آید و با استفاده از رابطه تبدیل (۲۹) به مختصات دکارتی انتقال داده شود، عنصر واقع در سطر اول و ستون اول داخل ماتریس فوق برابر $33/0.441$ می‌شود که نشان از دقت بسیار بالای حل عددی و تطابق بسیار خوب حل تحلیلی و عددی دارد. در نمونه‌ای دیگر، موقعیت هدف و فضاپیما را به ترتیب به‌صورت $(R_e, \pi/3)$ و $(R_e, \pi/4)$ در نظر بگیرید. زمان باقیمانده تا هدف ۲۰۰ ثانیه منظور شده‌است. ماتریس حساسیت در مختصات دکارتی با استفاده از حل عددی به‌صورت رابطه (۴۵) به‌دست آمده است:

در صورتی که دستگاه مختصات استوانه‌ای مذکور منطبق بر دستگاه اینرسی مورد نظر نباشد، ابتدا یک دستگاه اینرسی دکارتی بر مبنای مختصات قطبی و استوانه‌ای تعریف شده و سپس روابط ماتریس حساسیت با استفاده از رابطه (۴۷) به دستگاه اینرسی دلخواه منتقل می‌شود.

حالت خاص: مدل شتاب جاذبه ثابت

بردار سرعت لازم با فرض مدل زمین تخت و بردار شتاب جاذبه ثابت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{r}_T - \mathbf{r}}{t_{go}} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t_{go} \quad (49)$$

ماتریس حساسیت در مختصات قطبی با استفاده از رابطه فوق به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} + \frac{V_{Rr}}{r} \end{bmatrix} = -\frac{1}{t_{go}} I_{2 \times 2} \quad (50)$$

که در آن، $I_{2 \times 2}$ ماتریس همانی 2×2 است. همچنین با استفاده از رابطه (۴۹) می‌توان رابطه (۵۱) را برای مختصات استوانه‌ای استخراج کرد:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} \\ \dot{V}_{g\theta} \\ \dot{V}_{gz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t_{go} \end{bmatrix} I_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \\ V_{gz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \\ a_{Tz} \end{bmatrix} \quad (51)$$

در صورتی که رابطه (۴۸) برای مدل شتاب جاذبه ثابت ساده شود، همان رابطه (۵۱) حاصل می‌شود.

نتیجه گیری

در این مقاله، معادلات هدایت ضمنی در مختصات قطبی به دو روش حل مستقیم و همچنین جایگذاری روابط تبدیل در معادله هدایت ضمنی (در مختصات دکارتی) استخراج شد. استفاده از معادله هدایت ضمنی در مختصات قطبی ممکن است بر حسب کاربرد، مزایایی نسبت به معادلات هدایت ضمنی در مختصات دکارتی داشته باشد. همچنین مختصات قطبی بعضاً برای تعریف و استخراج بردارهای سرعت لازم با شرایط نهایی مختلف، سبب سهولت کار می‌شود که برای این نوع مسائل، استخراج روابط تحلیلی برای ماتریس حساسیت با استفاده از مختصات قطبی آسان‌تر می‌شود؛ چرا که اکثر روابط دینامیک مدار بر حسب مختصات قطبی بیان می‌شود.

$\mathbf{V}_g = \mathbf{C}_I^{wT} \mathbf{w}$. با مشتق‌گیری از رابطه اخیر و جایگذاری در رابطه هدایت ضمنی (۳۱) و مرتب‌سازی عبارات، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{\mathbf{w}} = -(\mathbf{C}_I^w \mathbf{Q}_I \mathbf{C}_I^{wT} + \mathbf{C}_I^w \dot{\mathbf{C}}_I^{wT}) \mathbf{w} - [\mathbf{a}_T]^W \quad (46)$$

که در رابطه فوق، ماتریس ستونی $[\mathbf{a}_T]^W$ شامل مؤلفه‌های بردار \mathbf{a}_T در دستگاه مختصات W است. همچنین \mathbf{w} شامل مؤلفه‌های بردار \mathbf{V}_g در دستگاه W است. به عبارت دیگر، $\mathbf{w} = [\mathbf{V}_g]^W = \mathbf{C}_I^w [\mathbf{V}_g]^I$ البته رابطه (۴۶) در مراجع موجود است (به طور نمونه مرجع [۷])؛ اما نیاز به رابطه (۲۹) را مرتفع نمی‌کند. استخراج هدایت ضمنی در مختصات بدنی نیز از رابطه (۴۶) منتج می‌شود [۶]. با ساده‌سازی رابطه (۴۶) برای مختصات قطبی و استفاده از رابطه (۲۹)، رابطه (۱۹) یا (۴۳) حاصل می‌شود.

در ادامه به روابط تبدیل برای دو حالت دیگر پرداخته می‌شود. محاسبه ماتریس حساسیت در دستگاه اینرسی $Ox'y'z'$ که دستگاه I' نامیده می‌شود، بر حسب ماتریس حساسیت در دستگاه اینرسی $Oxyz$ که با I نمایش داده می‌شود، به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{Q}_{I'} = \mathbf{C}_I^{I'} \mathbf{Q}_I \mathbf{C}_I^{I'T} \quad (47)$$

شایان ذکر است که برای حالت مذکور، مشتق ماتریس تبدیل صفر می‌شود.

در حالت دوم، با جایگذاری روابط (۳۰) و (۸۷) در رابطه (۴۶) معادله هدایت ضمنی در مختصات استوانه‌ای حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{gr} \\ \dot{V}_{g\theta} \\ \dot{V}_{gz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{Rr}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rr}}{r\partial\theta} - \frac{V_{R\theta}}{r} - \dot{\theta} & \frac{\partial V_{Rr}}{\partial z} \\ \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial r} + \dot{\theta} & \frac{\partial V_{R\theta}}{r\partial\theta} + \frac{V_{Rr}}{r} & \frac{\partial V_{R\theta}}{\partial z} \\ \frac{\partial V_{Rz}}{\partial r} & \frac{\partial V_{Rz}}{r\partial\theta} & \frac{\partial V_{Rz}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{gr} \\ V_{g\theta} \\ V_{gz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{Tr} \\ a_{T\theta} \\ a_{Tz} \end{bmatrix} \quad (48)$$

با توجه به تعریف مختصات استوانه‌ای و بر حسب تعریف بردار سرعت لازم، ممکن است که بعضی از عبارات رابطه اخیر صفر شود یا به راحتی تقریب زده شود. به طور نمونه، در صورتی که بردار سرعت لازم بر مبنای قید بردار موقعیت نهایی در زمان از پیش معلوم باشد، برای مسیر نامی می‌توان نتیجه گرفت که $\partial V_{Rz} / \partial r = 0$ و $\partial V_{Rz} / \partial \theta = 0$. البته در صورتی که دستگاه مختصات استوانه‌ای برای محاسبه ماتریس حساسیت (و تبدیل آن به مختصات اینرسی) به طور لحظه‌ای برای زمان حال تعریف شود، عبارات مذکور برای زمان حال نیز صفر می‌شود.

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0 \quad (59)$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r \quad (60)$$

روابط فوق با ضرب سینوس و کسینوس θ در روابط (52) و (53) و جمع یا تفریق آنها از هم حاصل شده است.

حال کمیت اسکالر $f(\mathbf{r})$ را در نظر بگیرید. دیفرانسیل $f(\mathbf{r})$ در مختصات دکارتی و قطبی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (61)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \quad (62)$$

با مساوی قرار دادن دو رابطه اخیر و جایگذاری برای dx و dy از رابطه (58) روابط زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \quad (63)$$

$$\frac{\partial f}{r \partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta \quad (64)$$

یا فرم ماتریسی آن به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{r \partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (65)$$

نکته ای که باید توجه داشت این است که در حالت کلی از لحاظ تابعیت $f(x, y) \neq f(r, \theta)$ است. به طور نمونه، فرض کنید که f فاصله از مبدأ است. در این حالت $f(r, \theta) = r$ و $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

در صورتی که $f(\mathbf{r})$ یک کمیت برداری نیز باشد، روابط (61) تا (64) همچنان برقرار است. برای اجتناب از تکرار، روابط (63) و (64) بر حسب مشتقات جزئی در مختصات دکارتی نوشته می شود. به عبارت دیگر،

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \mathbf{f}}{r \partial \theta} \sin \theta \quad (66)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \mathbf{f}}{r \partial \theta} \cos \theta \quad (67)$$

با جایگذاری برای تابع \mathbf{f} از رابطه $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y$ در سمت راست روابط (66) و (67) و همچنین جایگذاری رابطه $\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}$ در سمت چپ این روابط، روابط (68) تا (71) قابل حصول است:

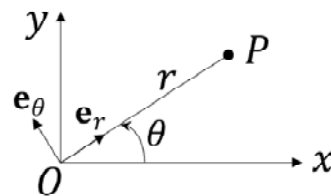
بنابراین، استخراج این روابط در مختصات قطبی و تبدیل روابط به مختصات دکارتی برای ماتریس حساسیت می تواند مفید باشد. همچنین با تعمیم روش حل از دو بعدی به سه بعدی، روابط تبدیل ماتریس حساسیت و معادله هدایت ضمنی برای مختصات استوانه ای به دست آمده است.

پیوست الف: روابط تبدیل مختصات

ابتدا، در این پیوست روابط مورد نیاز تبدیل مختصات قطبی به دکارتی یا معکوس آن مطابق مراجع آمده است. مطابق شکل (2) روابط مؤلفه های مختصات دکارتی بر حسب مختصات قطبی (r, θ) به صورت زیر نوشته می شود:

$$x = r \cos \theta \quad (52)$$

$$y = r \sin \theta \quad (53)$$



شکل ۲- نمایش مختصات قطبی

روابط تبدیل بردارهای یک به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta \quad (54)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta \quad (55)$$

که در آن \mathbf{i} و \mathbf{j} به ترتیب بردارهای یک در راستای محورهای x و y و در جهات مثبت آن محورها هستند. از روابط فوق به راحتی می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \mathbf{0} \quad (56)$$

همچنین اگر از روابط (54) و (55) نسبت به θ مشتق جزئی گرفت، می توان روابط زیر را استخراج کرد:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r \quad (57)$$

با دیفرانسیل گیری از روابط (52) و (53) می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} dr \\ r d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (58)$$

از جمله روابط مفید دیگر می توان به دو رابطه (59) و (60) اشاره کرد:

در مختصات استوانه‌ای تنها مؤلفه z اضافه می‌شود که منطبق بر محور z دستگاه مختصات اینرسی $Oxyz$ منظور می‌شود و بردار یکه آن با e_k نمایش داده می‌شود. در این حالت همچنان روابط (۵۲-۶۰) و روابط (۶۳-۷۱) برقرار است. با جایگذاری برای تابع f از رابطه (۶۰-۵۲) در روابط (۶۶) و (۶۷) دو رابطه دیگر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial f_z}{r \partial \theta} \sin \theta \quad (78)$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f_z}{r \partial \theta} \cos \theta \quad (79)$$

با استفاده از روابط:

$$f_x = f_r \cos \theta - f_\theta \sin \theta \quad (80)$$

$$f_y = f_r \sin \theta + f_\theta \cos \theta \quad (81)$$

به راحتی روابط زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_r}{\partial z} \cos \theta - \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \sin \theta \quad (82)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_r}{\partial z} \sin \theta + \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \cos \theta \quad (83)$$

با استفاده از روابط (۶۸-۷۱) و (۸۳-۷۸)، رابطه تبدیل برای ماتریس حساسیت در مختصات دکارتی بر حسب مختصات استوانه‌ای حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix} = C^T(\theta) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial r} & \frac{\partial f_r}{r \partial \theta} - \frac{f_\theta}{r} & \frac{\partial f_r}{\partial z} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial r} & \frac{\partial f_\theta}{r \partial \theta} + \frac{f_r}{r} & \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial r} & \frac{\partial f_z}{r \partial \theta} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix} C(\theta) \quad (84)$$

که در آن

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

همچنین مشتق ماتریس تبدیل (۸۵) نسبت به زمان به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{C}(\theta) = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

بنابراین،

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_r}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} - f_\theta \right) - \frac{\partial f_\theta}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) \quad (68)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_r}{\partial r} \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} - f_\theta \right) + \frac{\partial f_\theta}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) \quad (69)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_r}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} - f_\theta \right) - \frac{\partial f_\theta}{\partial r} \sin^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) \quad (70)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial f_r}{\partial r} \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} - f_\theta \right) + \frac{\partial f_\theta}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{r} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) \quad (71)$$

همچنین از روابط فوق می‌توان دریافت که

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r \right) \quad (72)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f_r}{\partial \theta} - f_\theta \right) \quad (73)$$

حال ماتریس تبدیل مختصات $C_p(\theta)$ را به صورت زیر در نظر

بگیرید:

$$C_p(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (74)$$

با استفاده از ماتریس تبدیل مذکور روابط (۶۸) تا (۷۱) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{bmatrix} = C_p^T(\theta) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial r} & \frac{\partial f_r}{r \partial \theta} - \frac{f_\theta}{r} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial r} & \frac{\partial f_\theta}{r \partial \theta} + \frac{f_r}{r} \end{bmatrix} C_p(\theta) \quad (75)$$

در صورتی که تابع برداری $f(\mathbf{r}, t)$ تابعی از بردار موقعیت و زمان باشد، روابط (۵۲) تا (۷۵)، به استثناء دو رابطه (۶۱) و (۶۲)، همچنان صحیح است. در حالت اخیر دو رابطه (۶۱) و (۶۲) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dt \quad (76)$$

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dt \quad (77)$$

Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, No. 1, 1987, pp. 53-60.

- [12] Ghahramani, N., Naghash, A. and Towhidkhah, F., "Incremental Predictive Command of Velocity to Be Gained Guidance Method," *Journal of Aerospace Science and Technology*, Iranian Aerospace Society, Vol. 5, No. 3, 2008, pp. 99-105.
- [13] Kamal, S. A. and Mirza, A., "The Multi-Stage-Q System and the Inverse-Q System for Possible Application in Satellite-Launch Vehicle (SLV), *The 4th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technologies*, Bhurban, Pakistan, June 2005.
- [14] Jalali-Naini, S.H., "An Implicit Guidance Formulation for Velocity Constraint," *The 9th Iranian Aerospace Society Conference*, Tehran, Feb. 2010.
- [15] Battin, R.H., "Lambert's Problem Revisited," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 5, May 1977, pp. 707-713.
- [16] Battin, R.H., "An Elegant Lambert Algorithm," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 6, 1984, pp. 662-670.
- [17] Nelson, S.L. and Zarchan, P., "Alternative Approach to the Solution of Lambert's Problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 4, 1992, pp. 1003-1009.
- [18] Izzo, D., "Lambert's Problem for Exponential Sinusoids," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 5, 2006, pp. 1242-1245.
- [19] Zhang, G., Mortari, D. and Zhou, D., "Constrained Multiple-Revolution Lambert's Problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 6, 2010, pp. 1779-1786.
- [20] Leeghim, H. and Jaroux, B.A., "Energy-Optimal Solution to the Lambert Problem," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 3, 2010, pp. 1008-1010.
- [21] Bando, M. and Yamakawa, H., "New Lambert Algorithm Using the Hamiltonian-Jacobi-Bellman Equation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 3, 2010, pp. 1000-1008.

$$C(\theta)\dot{C}^T(\theta) = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۸۷)$$

مراجع

- [1] Pitman, G.R., *Inertial Guidance*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1962.
- [2] Battin, R.H., "Space Guidance Evolution- A Personal Narrative," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 2, 1982, pp. 97-110.
- [3] Siouris, G.M., *Missile Guidance and Control Systems*, Springer Verlag, NY, 2004.
- [4] Martin, F.H., Closed-Loop Near-Optimum Steering for a Class of Space Missions, (D.Sc. Thesis), Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1965.
- [5] Battin, R.H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, Revised Edition, AIAA Education Series, USA, 1999.
- [6] Taylor, A.J. and Wagner, J.T., "On-Board Approach Guidance for a Planet-Orbiter," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 3, No. 12, 1966, pp. 1731-1737.
- [7] Martin, F.H., "Closed-Loop Near-Optimum Steering for a Class of Space Missions," *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 11, May 1966, pp. 1920-1927.
- [8] Gunckel, T.L., "Explicit Rendezvous Guidance Mechanization," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 1, No. 2, 1964, pp. 217-219.
- [9] Sökkappa, B.G., "On Optimal Steering to Achieve Required Velocity" *Guidance and Control, Proceedings of the 16th International Astronautical Congress*, Edited by M. Lunc, 1966, pp. 105-116.
- [10] Culbertson, J.D., "A Steering Law Satisfying the Constant Total Time of Flight Constraint," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 4, No. 11, 1967, pp. 1470-1474.
- [11] Bhat, M.S. and Shrivastava, S.K., An Optimal Q-Guidance Scheme for Satellite Launch Vehicles,