

# کنترل وضعیت فضاپیما با استفاده از روش کنترل بهینه غیر خطی ریکاتی وابسته به حالت و بسط سری توانی ریکاتی

محمد نوابی<sup>۱\*</sup>، مینا توانا<sup>۲</sup> و حمیدرضا میرزایی<sup>۳</sup>

۱-۳- دانشکده مهندسی فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

\* تهران، کد پستی: ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳

m\_navabi@sbu.ac.ir

کنترل وضعیت فضاپیما با وجود معادلات فوق غیرخطی و مرتبه بالا که نیازمند دقت و حساسیت بالایی در حل است، از جمله مسائل بسیار مهم و پیچیده در عصر حاضر است. از این رو روش های خطی با خطی سازی های بزرگ در حل سیستم های غیرخطی پیچیده، کاهش دقت و گاهی ناپایداری را به همراه خواهد داشت، که برای کنترل وضعیت فضاپیما با زوایای بزرگ و مانور مناسب نخواهد بود. در این مقاله، به منظور پایداری سه محوری فضاپیما با چهار چرخ عکس العملی از روش ریکاتی وابسته به حالت، بهره گرفته شده است. روش ریکاتی وابسته به حالت روشی سیستماتیک برای اعمال به سیستم های غیرخطی است که ضمن ارضای قیود حاکم بر سیستم، حل حلقه بسته بهینه ای را برای سیستم ارائه می دهد. اما زمان بر بودن این روش در مسائل آنالاین مشکل ساز خواهد شد، بنابراین، روش  $Thteta-D$  با بسط سری توانی معادله ریکاتی برای حل این مشکل ارائه می شود. براساس نتایج شبیه سازی روش  $Thteta-D$  با تفاوت اندکی از روش ریکاتی، نتایج مطلوب تری را ارائه خواهد داد.

واژه های کلیدی: کنترل غیرخطی بهینه، تنظیم کننده مربعی، معادله ریکاتی وابسته به حالت، تا-دی، همپلتونین، حل پایدار خشی

|                      |  | علائم و اختصارات         |                                     |
|----------------------|--|--------------------------|-------------------------------------|
| $j$                  | ممان اینرسی ماهواره                        | $A, B$                   | ماتریس های فضای حالت                |
| $k$                  | پارامتر طراحی                              | $a$                      | پارامتر طراحی                       |
| $Q, R$               | ماتریس های وزنی                            | $h_B$                    | بردار مومنتوم زاویه ای فضاپیما      |
| $T_{rwa}$            | گشتاور اعمالی در دستگاه بدنی               | $h_{Bx}, h_{By}, h_{Bz}$ | مؤلفه های مومنتوم زاویه ای فضاپیما  |
| $T_x, T_y, T_z$      | مؤلفه های بردار گشتاور کنترلی              | $h_{RWA}$                | مومنتوم زاویه ای چرخ های عکس العملی |
| $u$                  | قانون کنترلی                               | $I_\omega$               | ماتریس ممان اینرسی چرخ ها           |
| $x$                  | بردار حالت های سیستم                       | $J$                      | تابع هزینه                          |
| $\varepsilon$        | ضریب خطا                                   |                          |                                     |
| $\lambda$            | بسط سری توانی                              |                          |                                     |
| $\psi, \theta, \phi$ | زوایای اولر                                |                          |                                     |
| $\omega_B$           | بردار سرعت زاویه ای فضاپیما در دستگاه بدنی |                          |                                     |

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. کارشناس ارشد

۳. کارشناس ارشد

مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنی  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

## مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائل در طراحی فضاپیما پایداری و کنترل وضعیت آن است. چنانکه نیازمندی‌های مأموریت فضاپیما گسترده و متغیر باشد، کنترل وضعیت فضاپیما نیز گسترده‌تر و پیچیده‌تر خواهد بود. کنترل فضاپیما معمولاً مترادف با کنترل وضعیت فضاپیماست، به عبارت دیگر نظم مهندسی، حفظ یک ماهواره در یک جهت صحیح است. زیرسیستم کنترل وضعیت فضاپیما یکی از مهم‌ترین زیرسیستم‌های فضاپیماست، به طوری که موفقیت‌آمیز بودن برخی مأموریت‌های فضاپیما بدون یک سیستم کنترل وضعیت مناسب امکان‌پذیر نخواهد بود. هدف این زیرسیستم، کنترل وضعیت فضاپیما براساس محاسبه وضعیت زاویه‌ای ماهواره با استفاده از اندازه‌گیری دریافتی از حسگرهاست. از یک دیدگاه می‌توان پایداری و کنترل وضعیت ماهواره را به دو نوع تقسیم کرد، در روش‌های غیرفعال از مشخصات ذاتی ماهواره و شرایط محیطی برای قرار دادن آن در وضعیت خاص استفاده می‌شود. متقابلاً در روش‌های فعال با اعمال عکس‌العمل‌های متناسب به اختلالات وارد بر ماهواره، وضعیت آن در جهت دلخواه قرار داده می‌شود. این کار توسط عملگرها انجام می‌شود که عملگر منتخب در این مقاله چرخ‌های عکس‌العملی است.

برای کنترل ماهواره لازم است که در هر لحظه گشتاور مشخصی را به آن اعمال نماییم تا در طول زمان در وضعیت دلخواه قرار گیرد. مدل ریاضی که معمولاً برای کنترل وضعیت فضاپیما ارائه می‌شود، مدل فوق غیرخطی و مرتبه بالا است. اگرچه مدل خطی از وضعیت فضاپیما می‌تواند در زوایای کوچک، الگوی مناسبی برای حل باشد، اما همین الگو در مسائلی با زوایای بزرگ یا همراه با مانور می‌تواند به خطاهای غیرقابل چشم‌پوشی منجر شود که سبب ناپایداری فضاپیما می‌شود.

از آنجا که تنظیم‌کننده مربعی خطی روشی شناخته و پایدار است، از این رو بسط روش تنظیم‌کننده مربعی خطی برای کنترل سیستم‌های غیرخطی مرتبه بالا از جمله کنترل وضعیت فضاپیما، امری مؤثر و کارآمد خواهد بود.

دیدگاه‌های متعددی برای طراحی کنترل سیستم‌های غیرخطی در طی سال‌های اخیر معرفی شده و مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اکثر روش‌های کنترل غیرخطی معرفی شده برای حل مسئله همراه با محدودیت‌هایی بوده‌اند. چرا که گاهی با سیستم‌های غیرخطی روبه‌رو می‌شویم که با قیودی روی کنترل یا حالت سیستم همراه هستند یا به‌طور کلی سیستم غیرخطی ناپایدار است، در این صورت روش‌های

غیرخطی معرفی شده در پاسخگویی ناتوان خواهند بود. به طور مثال در سیستم کنترل وضعیت ماهواره مورد نظر، میزان گشتاور کنترلی حاصل از چرخ‌های عکس‌العملی را می‌توان از قیود حاکم بر مسئله دانست. از این رو ارائه یک روش سیستماتیک برای سیستم‌های غیرخطی پیچیده که بتواند ضمن ارضای قیود حاکم بر آن حل بهینه حلقه بسته‌ای را برای سیستم ارائه دهد از جمله مباحث چالش‌برانگیز مهندسان بوده است [۱].

روش ریکاتی وابسته به حالت یک استراتژی شناخته شده و بسیار کاربردی در دهه‌های اخیر در زمینه کنترلی به‌ویژه کنترل وضعیت فضاپیما به شمار می‌آید. در حقیقت این روش با ایجاد یک الگوریتم مؤثر برای کنترل‌های فیدبک غیرخطی ترکیبی، با وجود عوامل غیرخطی وابسته به حالت در حالی که یک طراحی منعطفی را برای سیستم در طی ماتریس‌های وزن‌دهی حالت ارائه می‌دهد، شرایط بهینه‌ای را در حل فراهم آورده است. در حقیقت بر اساس این وزن‌دهی می‌توان توافقی میان تلاش کنترلی و دقت حالت‌های سیستم و زمان همگرایی ایجاد کرد. برای مثال گاهی در حالت‌هایی از پرواز هستیم که نیاز است با سرعت به شرایط پایدار برسیم و در همان وضعیت باقی بمانیم به عبارتی میزان انحراف از وضعیت تعادل را در یک مقدار حداقل حفظ نماییم، مثلاً در یک ماهواره با مأموریت تصویربرداری این شرایط در حات تصویربرداری با دقت بالا صورت خواهد گرفت.

روش ریکاتی وابسته به حالت، اخیراً بسیار مورد توجه است و در زمینه‌های بسیاری استفاده می‌شود. بر اساس این تئوری، هر سیستم غیرخطی می‌تواند به شکلی پارامترسازی شود که ساختاری مشابه با ساختار یک سیستم خطی در فضای حالت داشته باشد [۲]. در روش ریکاتی وابسته به حالت، لازم است که معادله ریکاتی وابسته به حالت در هر بازه یا گام زمانی حل شود، بنابراین، حجم محاسبات در مسائل پیچیده بسیار بالا بوده و غیرقابل چشم‌پوشی است.

ورنلی<sup>۴</sup> و کوک<sup>۵</sup> در سال ۱۹۷۵، به‌منظور برطرف کردن مشکل موجود در روش ریکاتی وابسته به حالت، از بسط سری توانی معادله ریکاتی برای سهولت در حل استفاده کردند. این مسئله از طریق معرفی یک متغیر میانی<sup>۶</sup>،  $\theta$ ، صورت گرفت. بر اساس این متغیر میانی تابع هزینه بهینه سیستم یک سری توانی از  $\theta$  بسط داده خواهد شد. در این صورت معادله همیلتونین - جاکوبی - بلمن که از بیان بهینه مسئله غیرخطی ناشی می‌شود، به یک سری از معادلات جبری بازگشتی تقلیل خواهد یافت که با اضافه کردن اغتشاش به تابع هزینه و دست‌کاری این ترم‌ها به صورت مناسب، دست‌یابی به

4. Wernli

5. Cook

6. Intermediate variable

مشاهده می‌شود، المان گشتاور صفری در دستگاه بدنی وجود ندارد، بنابراین، قادر است شرایط پایدار و کنترل‌پذیری را در راستای سه محور دستگاه بدنی فراهم آورد.

سینماتیک و دینامیک وضعیت غیرخطی فضاپیما در معادلات (۳) نشان داده شده است [۵]:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= [\omega_{by} \sin \phi + \omega_{bz} \cos \phi] \sec \theta \\ \dot{\theta} &= \omega_{by} \cos \phi - \omega_{bz} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \omega_{bx} + [\omega_{by} \sin \phi + \omega_{bz} \cos \phi] \tan \theta \end{aligned} \quad (3)$$

به طوری که  $[\psi \ \theta \ \phi]^T$  زوایای اولر بوده و ترتیب چرخش ۳-۲-۱ برای مسئله در نظر گرفته شده است. دینامیک سیستم به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$I_{SC} \cdot \dot{\omega}_B = -\omega_B \times h_B - \omega_B \times h_{RWA} + T_{rwa} \quad (4)$$

به طوری که در رابطه فوق  $I_{SC}$  ممان اینرسی فضاپیما و  $\omega_B = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  سرعت زاویه‌ای فضاپیما و  $h_{RWA} = [h_{RWAx} \ h_{RWAy} \ h_{RWAz}]^T$  و  $h_B = [h_{Bx} \ h_{By} \ h_{Bz}]^T$  به ترتیب مومنتوم زاویه‌ای فضاپیما و چرخ‌های عکس‌العملی هستند. شکل ماتریسی  $\omega_B \times$  و  $h_{RWA} \times$  در روابط فوق به ترتیب به صورت روابط (۵) و (۶) تعریف می‌شوند:

$$\omega_B \times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$h_{RWA} \times \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -h_{RWAz} & h_{RWAy} \\ h_{RWAz} & 0 & -h_{RWAx} \\ -h_{RWAy} & h_{RWAx} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

در این صورت دینامیک وضعیت فضاپیما می‌تواند در یک ساختار شبه خطی به صورت رابطه (۷) بازنویسی شود [۵]:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_B &= I_{SC}^{-1}(-\tilde{\omega}_B h_B + \omega_B \tilde{h}_{RWA}) + I_{SC}^{-1} T_{rwa} = \\ I_{SC}^{-1}(-\tilde{\omega}_B I_{SC} + \tilde{h}_{RWA}) \omega_B &+ I_{SC}^{-1} T_{rwa} \end{aligned} \quad (7)$$

یک کنترل‌کننده پایدارکننده برای سیستم فوق می‌تواند به هدف حداقل کردن تابع هزینه مربعی (۱۶) طراحی شود:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (16)$$

به طوری که  $u \in R^m, Q \in R^{n \times n}, x \in R^n, f \in R^n, B \in R^{n \times m}$  و  $R \in R^{m \times m}$  و  $f(0) = 0$  و  $f$  برقرار باشد و ماتریس  $Q$  مثبت نیمه معین بوده و  $R$  معین مثبت است. فرضی که وجود دارد این است که برای  $x \in \Omega_x$ ، که در آن  $\Omega_x$  یک ناحیه مشخص در  $R^n$  است که برای این تکنیک مورد نیاز است. فرض می‌شود که حل موجود برای مسئله

پایداری مجانبی نیمه‌کلی و غلبه بر مسئله با شرایط اولیه بزرگ ممکن خواهد شد. در حقیقت این روش، به معرفی یک کنترل‌کننده غیرخطی مادون بهینه براساس حل تقریبی معادله همیلتونین- جاکوبی- بلمن می‌پردازد. برای کسب اطمینان از عملی بودن و توانایی روش‌های غیرخطی مورد نظر، از آن‌ها در جهت کنترل وضعیت فضاپیما بهره برده شده است [۳].

ماهواره بررسی شده، با چرخ‌های عکس‌العملی کنترل می‌شود که در یک پیکر هرمی شکل قرار گرفته‌اند. چهار چرخ عکس‌العملی به نحوی در این پیکر قرار گرفته‌اند که با محورهای بدنی زاویه مشخصی را تشکیل می‌دهند. چرخ چهارم در زاویه خاصی از سه محور دستگاه بدنی قرار گرفته است تا بتواند در راستای هر سه محور در صورت خرابی هر یک از سه چرخ قرار گرفته رو سه محور دستگاه بدنی، گشتاور کنترلی ایجاد کند. در مسئله بررسی شده دو چرخ عکس‌العملی خراب در نظر گرفته شده است و توانایی این چیدمان در ایجاد پایداری سه محوری با دو چرخ عکس‌العملی باقیمانده نشان داده خواهد شد.

از آنجاکه چرخ‌های عکس‌العملی همگی در یک شکل مورب به طوری که بردار رقص- محوری دو چرخ باقیمانده قرار گرفته در فضاپیما، با محورهای بدنی فضاپیما متعامد نباشند، قرار گرفته‌اند، می‌توانند بعضی شرایط کنترل یا پایداری سه محوری را فراهم کنند.

### تعریف مسئله و معادلات حاکم بر سیستم

کنترل ایجاد شده با چرخ‌های عکس‌العملی به علت چیدمان خاص چرخ‌ها بهترین و بیشترین بازده کنترلی را به ارمغان خواهد آورد. به علت خرابی دو چرخ ۱ و ۲، گشتاورهای اعمالی در دستگاه بدنی به صورت رابطه (۱) محاسبه خواهد شد [۴].

$$T_{rwa} = [C_{rv \ 2b}] [0 \ 0 \ T_{rwa} \ T_{rwa}]^T \quad (1)$$

شایان توجه است،  $T_{rwa}$  که نمایانگر گشتاور اعمالی در دستگاه بدنی است با وجود دو چرخ از دست رفته، هنوز به صورت کامل المان غیرصفر دارد، به عبارت دیگر در راستای سه محور دستگاه بدنی گشتاور کنترلی وجود دارد. با استفاده از معادله (۱) با دو چرخ اجرایی ۳ و ۴، گشتاورهای کنترلی در دستگاه بدنی به صورت معادله (۲) بیان خواهد شد:

$$T_{rwa} = \begin{bmatrix} 0.67(T_{rv \ 3} + T_{rv \ 4}) \\ 0.53(T_{rv \ 3} + T_{rv \ 4}) \\ 0.53(-T_{rv \ 3} + T_{rv \ 4}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

در طول اجرای دو چرخ ۳ و ۴ در یک زمان مشخص، چرخ‌ها گشتاورهای برابری تولید نمی‌کنند. همان‌طور که در معادله (۲)

بسط سری توانی  $\lambda$  بر اساس  $\theta$  به قرار رابطه (۲۵) خواهد بود:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} T_i \theta^i x \quad (25)$$

در رابطه فوق  $T_i$  یک ماتریس متقارن است. با قراردادن معادله

(۲۵) در معادله (۲۴) و برابر قراردادن ضرایب توان‌های  $\theta$  با صفر، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$T_0 A_0 + A_0^T T_0 - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T T_0 = 0 \quad (26)$$

$$T_1 (A_0 - g_0 R^{-1} g_0^T T_0) + (A_0^T - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T) T_1 = \frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_0}{\theta} +$$

$$T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 - D_1$$

$$T_2 (A_0 - g_0 R^{-1} g_0^T T_0) + (A_0^T - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T) T_2 = \frac{T_1 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_1}{\theta} +$$

$$T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_1 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_1 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 +$$

$$T_1 g_0 R^{-1} g_0^T T_1 + T_1 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 - D_2$$

$$T_n (A_0 - g_0 R^{-1} g_0^T T_0) + (A_0^T - T_0 g_0 R^{-1} g_0^T) T_n = \frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_{n-1}}{\theta} +$$

$$\sum_{j=0}^{n-2} T_j \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_{n-2-j} + \sum_{j=0}^{n-1} T_j [g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} + \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T] T_{n-1-j} +$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} T_j g_0 R^{-1} g_0^T T_{n-j} - D_n$$

توجه کنید که معادله (۲۶) شامل ماتریس ضرایب ثابت و یک

معادله جبری ریکاتی است. مابقی معادلات (۲۷) توابع لیاپانوف بوده

که از نظر  $T_i$  خطی هستند. از آن جا که سمت راست این معادلات

شامل  $x/\theta$  است، می‌توان نتیجه گرفت  $T_i$  تابعی از  $x$ ،  $\theta$  است، در

این صورت  $T_i$  را می‌توان به شکل  $T_i(x, \theta)$  بازنویسی کرد. کنترل

برحسب سری توانی برابر (۲۸) است:

$$u = -R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} = -R^{-1} B^T(x) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i x \quad (28)$$

الگوریتم بدون ترم  $D_i$ ، تقریب  $\theta$  نامیده می‌شود. یکی از

مشکلات تقریب  $\theta$  در این است که شرایط اولیه بزرگ منجر به

افزایش مقدار کنترل خواهد شد. به منظور برطرف کردن این مشکل،

$D_i$  به صورت روابط (۲۹) برای حل بیان می‌شود:

$$D_1 = k_1 e^{\mu t} \left[ \frac{T_0 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_0}{\theta} + T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 \right]$$

$$D_2 = k_2 e^{\mu t} \left[ \frac{T_1 A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_1}{\theta} + T_0 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_1 + T_0 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_1 \right]$$

$$+ T_1 g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_0 + T_1 \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_0 + T_1 g_0 R^{-1} g_0^T T_1$$

$$D_n = k_n e^{\mu t} \left\{ \frac{T_{n-1} A(x)}{\theta} - \frac{A^T(x) T_{n-1}}{\theta} + \sum_{j=0}^{n-1} T_j [g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} + \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T] T_{n-1-j} \right\}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-2} T_j \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_{n-2-j} + \sum_{j=0}^{n-1} T_j g_0 R^{-1} g_0^T T_{n-j} \}$$

کنترل بهینه در معادلات بیان شده فوق وجود داشته و واحد باشد. حل بهینه مسئله تنظیم‌کننده غیرخطی در فضای بی‌نهایت می‌تواند توسط معادله دیفرانسیل جزئی همیلتونین- جاکوبی- بلمن (۱۷) صورت گیرد:

$$\frac{\partial V^T}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V^T}{\partial x} B(x) R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^T Q x = 0 \quad (17)$$

به طوری که  $V(x)$  تابع هزینه است:

$$V(x) = \min_u \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (18)$$

و شرایط  $V(0) = 0$  و  $V(x) > 0$  بر آن حاکم باشد. فرض می‌شود

که  $v(x)$  به صورت متوالی مشتق‌پذیر باشد. بنابراین، کنترل بهینه

برای سیستم فوق به صورت (۱۹) مشخص می‌شود:

$$u = -R^{-1} B^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} = -R^{-1} B^T(x) \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i x \quad (19)$$

معادله همیلتونین- جاکوبی- بلمن برای حل کردن بسیار دشوار

است. به منظور گسترش یک حل تقریبی برای این مسئله، اغتشاشات

به تابع هزینه اضافه می‌شوند، که در این صورت تابع هزینه به صورت

رابطه (۲۰) تغییر شکل می‌یابد:

$$j = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ x^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x + u^T R u \right\} dt \quad (20)$$

به طوری که  $\theta^i$  و  $D_i$  به نحوی انتخاب می‌شوند که

$Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i$  مثبت نیمه معین باشد و شرط بیان شده در رابطه (۲۱)

برقرار باشد:

$$\|Q\|_2 > \left\| \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right\|_2 \quad (21)$$

معادله حالت اصلی به یک فرم شبیه به ساختار خطی رابطه

(۲۲) بازنویسی می‌شود:

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u = A(x)x + B(x)u =$$

$$\left\{ A_0 + \theta \left[ \frac{A(x)}{\theta} \right] \right\} x + \left\{ g_0 + \theta \left[ \frac{g(x)}{\theta} \right] \right\} u \quad (22)$$

به طوری که  $A_0$  یک ماتریس ثابت است و  $(A_0, g_0)$  یک جفت

پایدار شونده باشند، در این صورت  $\{A_0 + A(x)\}, \{g_0 + g(x)\}$  به

صورت تک‌های کنترل‌پذیر است.  $\theta$  یک متغیر میانی به منظور بسط سری

توانی است. رابطه (۲۳) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (23)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳) در معادله اغتشاش یافته همیلتونین-

جاکوبی- بلمن، این معادله به صورت رابطه (۲۴) بازنویسی خواهد شد:

$$\lambda^T f(x) - \lambda^T B(x) R^{-1} B(x) \lambda + \frac{1}{2} x^T \left[ Q + \sum_{i=1}^{\infty} D_i \theta^i \right] x = 0 \quad (24)$$

فرض کنید که شرایط زیر برقرار باشد:

- $x \in \Omega$  به طوری که  $\Omega \subset R^n$  یک مجموعه فشرده است.
  - $f(x)$  به صورتی تقسیم بندی می شود که  $(A_0, g)$  کنترل پذیر باشد.
  - $A(x)$  در تمام ناحیه  $x \in \Omega$  پیوسته باشد.
  - $D_i$  بر اساس معادلات (۲۹) انتخاب شود.
- سپس مجموعه ای از ماتریس های اغتشاش  $D_i$  موجود خواهد بود که سری های  $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i$  ایجاد شده توسط معادله (۲۶) و (۲۷) سری های تکه ای همگرایی خواهند بود.

### مثال عددی و شبیه سازی

پایداری سه محوری، هدف کنترلی فضاپیمای مورد نظر است. در ابتدا، معادلات دینامیک سیستم فضاپیما در فضای حالت بیان خواهد شد، چرا که برای اعمال روش های بیان شده این مسئله ضروری است. فضای حالت برای مسئله کنترل وضعیت به صورت رابطه (۳۱) تعریف می شود [۴]:

$$x = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad \int \phi \quad \int \theta \quad \int \psi \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (31)$$

و کنترل ورودی:

$$u = T_{rva} = [T_x \quad T_y \quad T_z]^T \quad (32)$$

سه حالت انتگرالی از زوایای اولر در تقسیم بندی حالت سیستم، به منظور تقویت و بهبود بازدهی یا راندمان تعقیب قرار گرفته اند. بیان فضای حالت سیستم دینامیک وضعیت می تواند در ساختار شبه خطی وابسته به حالت تتا- دی (۳۳) بیان شود:

$$\dot{x} = f(x) + Bu = F(x)x + Bu = \left[ A_0 + \theta \frac{A(x)}{\theta} \right] x + Bu \quad (33)$$

در نتیجه با پارامترسازی معادلات دینامیک سیستم که در معادله (۳۳) بیان شده بود و با توجه به معادلات (۳) و (۷) خواهیم داشت:

$$F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{17} & A_{18} & A_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{28} & A_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{38} & A_{39} \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} & A_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} & A_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{97} & A_{98} & A_{99} \end{bmatrix} \quad (34)$$

به طوری که  $k_i > 0$  و  $a_i > 0$  برای  $i=1,2,\dots,n$  پارامترهای قابل تنظیم طراحی هستند. ایده تشکیل  $D_i$  در این روش براساس مشاهده است، که حالت های اولیه بزرگ ممکن است به علت ترم وابسته به حالت  $A(x)$  در سمت راست معادلات، موجب افزایش کنترل شود. اگر  $x$  اولیه بزرگ باشد به مقادیر بسیار بزرگی رشد می کنند. برای مثال، زمانی که  $A(x)$  شامل ترم های مربعی باشد ممکن است، در صورتی که  $x$  دارای مقدار اولیه بزرگی باشد، مقدار بزرگی را اختیار کند. همان طور که در سمت چپ معادلات (۲۷) مشاهده می شود، یک مقدار بزرگ در  $A(x)$  کاملاً در حل  $T_i$  منعکس می شود [۹]. از آنجا که  $T_i$  در معادله بعدی برای محاسبه  $T_{i+1}$  مورد استفاده قرار خواهد گرفت، این مقدار بزرگ، تکثیر و تقویت خواهد شد و متعاقباً منجر به ورودی کنترل بزرگ فرمان یا ناپایداری خواهد شد. بنابراین، اگر  $D_i$  به طوری انتخاب شود که:

$$\frac{T_{i+1} A(x) A^T(x) T_{i+1}}{\theta} + \sum_{j=0}^{i-2} \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_{i-2-j} + \sum_{j=0}^{i-1} [g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} + \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_{i+1-j} + \sum_{j=1}^{i-1} T_j g_0 R^{-1} g_0^T T_{i-j} - D_n] \quad (30)$$

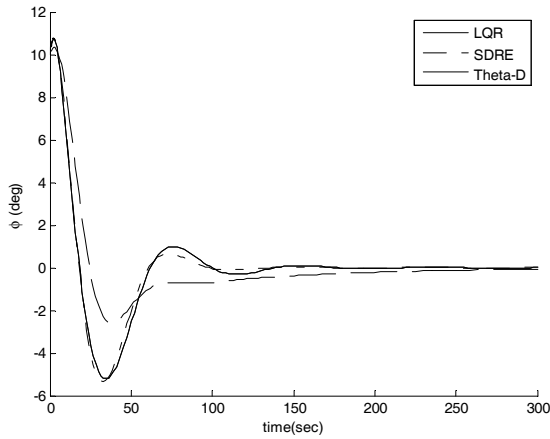
$$= \varepsilon_i(t) \left\{ \frac{T_{i+1} A(x) A^T(x) T_{i+1}}{\theta} + \sum_{j=0}^{i-1} [g_0 R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} + \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} g_0^T T_{i+1-j} + \sum_{j=1}^{i-2} \frac{g(x)}{\theta} R^{-1} \frac{g^T(x)}{\theta} T_{i-2-j} + \sum_{j=1}^{i-1} T_j g_0 R^{-1} g_0^T T_{i-j}] \right\}$$

به طوری که  $\varepsilon_i$  به منظور جلوگیری از رشد این مقدار بزرگ در معادلات مورد استفاده قرار می گیرد. به طور خلاصه، سه عملکرد برای  $\varepsilon_i$  وجود دارد. اولین کاربرد برای جلوگیری از مقادیر بزرگ در کنترل است، دومین کاربرد در ارضای بعضی شرایط مورد نیاز در اثبات همگرایی و پایداری در الگوریتم  $\theta - D$ ، سومین کاربرد برای مدوله کردن عملکرد گذرا توسط تنظیم پارامترهای  $k_i, a_i$  است. در طرف دیگر، ترم نمایی  $e^{-a_i t}$  با  $a_i > 0$  برای امکان حضور ترم های اغتشاشی در تابع هزینه و تقلیل معادله همپلتونین- جاکوبی- بلمن، مورد استفاده قرار می گیرد. این مسئله حل مجانبی این معادله را تضمین خواهد کرد. گام های اجرایی در روش  $\theta - D$  به طور خلاصه در زیر آورده شده است:

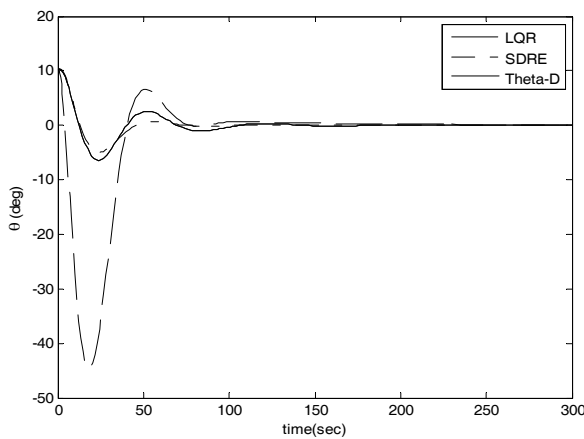
۱. حل معادله ریکاتی جبری برای یکبار جهت به دست آوردن  $T_0$  که در آن  $g_0, R, Q, A_0$  محاسبه می شوند. توجه کنید که نتیجه  $T_0$  یک ماتریس ثابت معین مثبت است.
۲. حل اولین معادله خطی لیاپانوف برای به دست آوردن  $T_i(x, \theta)$  به عنوان یک حل بسته
۳. حل مابقی معادلات لیاپانوف خطی توسط دنبال کردن فرایند، مشابه گام ۲. تعداد  $T_i$  مورد نیاز وابسته به مسئله است.

تئوری زیر همگرایی بسط سری  $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \theta) \theta^i$  را توسط انتخاب مناسب از ماتریس  $D_i$  نشان می دهد.

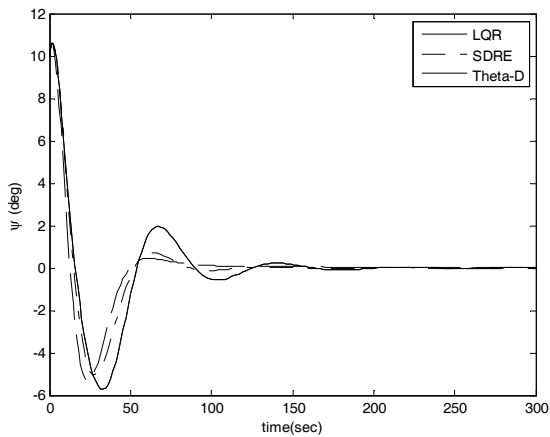
تفاوت عملکرد روش‌ها با دقت بهتری مشاهده شود. همان‌طور که در نمودارهای (۱) تا (۳) نشان داده شده است، رفتار زاویای اولر بر اساس هر سه روش کنترلی وضعیت پایداری را در نهایت خواهند یافت.



شکل ۱- رفتار زاویه  $\phi$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



شکل ۲- رفتار زاویه  $\theta$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



شکل ۳- رفتار زاویه  $\psi$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{71} & B_{72} & B_{73} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} \\ B_{91} & B_{92} & B_{93} \end{bmatrix} \quad (35)$$

به‌طوری که مؤلفه‌های ماتریس‌های  $B$ ،  $F(x)$  به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{17} &= 1; A_{18} = \sin(\phi) \tan(\theta); A_{19} = \cos(\phi) \tan(\theta); \\ A_{28} &= \cos(\phi); A_{29} = -\sin(\phi); A_{38} = \sin(\phi) \sec(\theta); \\ A_{39} &= \cos(\phi) \sec(\theta); A_{41} = 1; A_{52} = 1; A_{63} = 1; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{79} \\ A_{87} & A_{88} & A_{89} \\ A_{97} & A_{98} & A_{99} \end{bmatrix} = I_{SC}^{-1} (-\tilde{\omega}_B I_{SC} + \tilde{h}_{RWA}) \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} B_{71} & B_{72} & B_{73} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} \\ B_{91} & B_{92} & B_{93} \end{bmatrix} = I_{SC}^{-1} \quad (38)$$

تابع هزینه به صورت تابع مربعی معادله (۳۹) انتخاب می‌شود:

$$J = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (39)$$

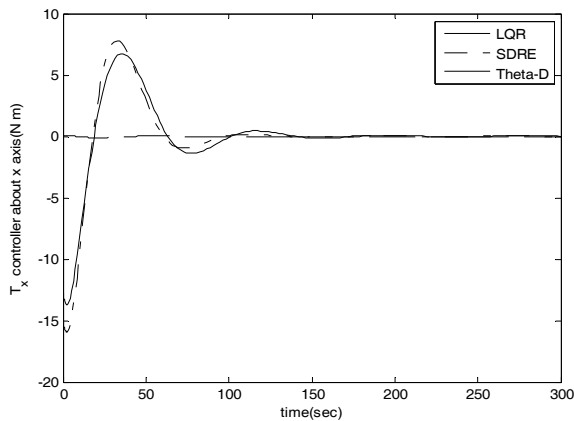
ماتریس ضرایب کنترل و حالت به ترتیب  $R = [1 \ 1 \ 1]^T$  و  $Q = 0.05[10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 0]^T$  در نظر گرفته شده‌اند و مقادیر اولیه سرعت زاویه‌ای و زوایای اولر به صورت روابط (۴۰) و (۴۱) فرض خواهند شد.

$$\omega = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} \dots \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^\circ \\ 10^\circ \\ 10^\circ \end{bmatrix} \dots \quad (41)$$

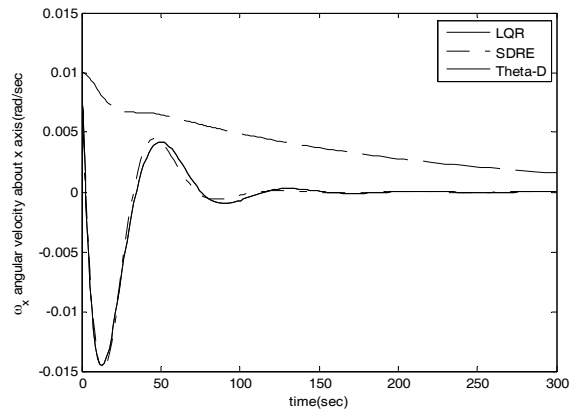
ممان اینرسی همه چرخ‌ها  $I_\omega = 0.01$  و ممان اینرسی ماهواره به صورت  $J = \text{diag}[[80 \ 40 \ 60]]$  در نظر گرفته شده است. در این صورت نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی به صورت شکل‌های (۱) تا (۹) ارائه خواهد شد. در نهایت برای درک بهتر از روش‌های اعمالی و مقایسه نتایج به‌دست آمده از هر سه روش کنترلی، نتایج هر پارامتر را در یک نمودار آورده‌ایم تا بر این اساس

شکل‌های (۴) تا (۶) نشان‌دهنده رفتار سرعت زاویه‌ای فضاپیما بر اساس هر سه روش کنترلی مورد نظر نشان داده شده است. از نمودارهای فوق می‌توان مشاهده کرد؛ در هر سه روش کنترلی، سرعت زاویه‌ای فضاپیما به شرایط پایدار صفر همگرا شده و شرایط پایداری را فراهم خواهند کرد. رفتار سرعت زاویه‌ای فضاپیما بر اساس دو روش SDRE و Theta-D بسیار نزدیک به هم هستند. همان‌طور که از شکل‌های (۷) تا (۹) مشاهده می‌شود، گشتاور کنترلی بر اساس هر سه روش معرفی شده به سمت صفر همگرا شده و شرایط پایداری را در جهت کنترل وضعیت فضاپیما فراهم آورده‌اند. از نتایج پیداست که روش‌های بهینه به کار برده شده سبب تولید قوانین کنترلی همواری شده‌اند که تعقیب این فرامین توسط عملگرها ممکن خواهد بود. در ادامه، از روش کنترلی PID بهینه و ریکاتی خطی نیز برای کنترل وضعیت فضاپیما استفاده شده و از نظر اندازه و نوسانی بودن قوانین کنترلی تولیدی و سرعت همگرایی، حالت‌های سیستم به ورودی مرجع با روش‌های بهینه به کار برده شده مقایسه شده است.

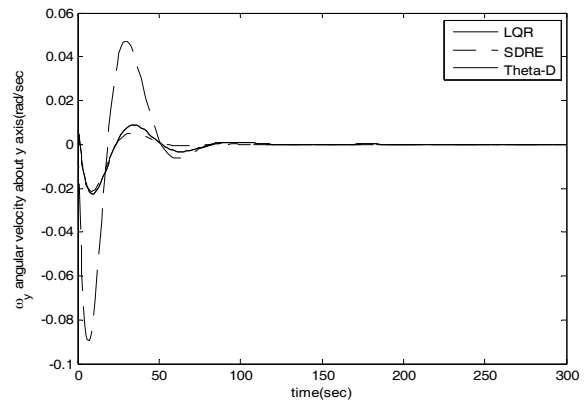


شکل ۷- گشتاور  $T_x$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

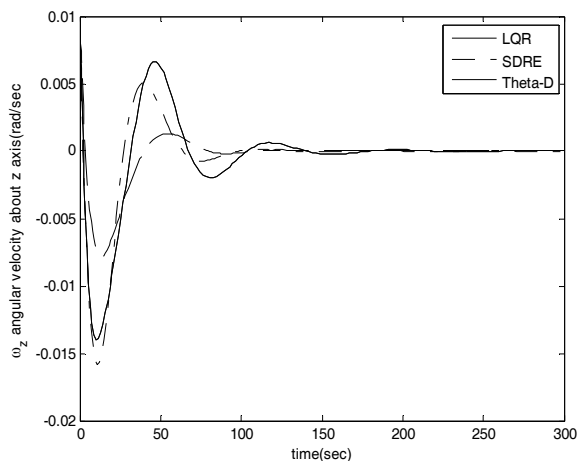
در حقیقت میزان تلاش کنترلی تولیدشده همان میزان گشتاور تولیدی با دو چرخ‌های عکس‌العملی باقیمانده در فضاپیماست، که مسلماً با محدودیت‌هایی همراه است. از این رو تلاش کنترلی پارامتری حساس و قابل توجه در انتخاب روش کنترلی مورد نظر است. تلاش کنترلی در هر دو روش غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت و تتا- دی تقریباً نزدیک به هم هستند و دامنه‌های یکسانی دارند. میزان دامنه و تلاش کنترلی در دو روش غیرخطی نامبرده معقول و قابل اجراست که این امر عملی و کاربردی بودن این دو روش را تأیید خواهد کرد. اما هزینه کلی از جمله معیارهای اصلی در انتخاب روش‌های کنترلی در روش تنظیم‌کننده خطی با اختلاف تقریباً ۱۷۰۰۰۰ از مقادیر هزینه کلی غیرخطی، حدود ۱۰ برابر هزینه به دست آمده از آن‌هاست.



شکل ۴- سرعت زاویه‌ای  $\omega_x$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

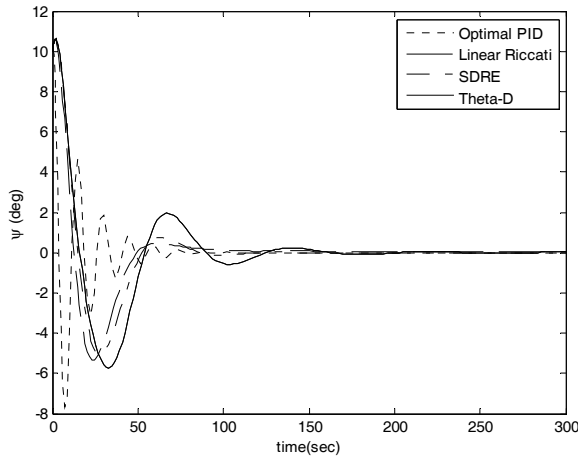


شکل ۵- سرعت زاویه‌ای  $\omega_y$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

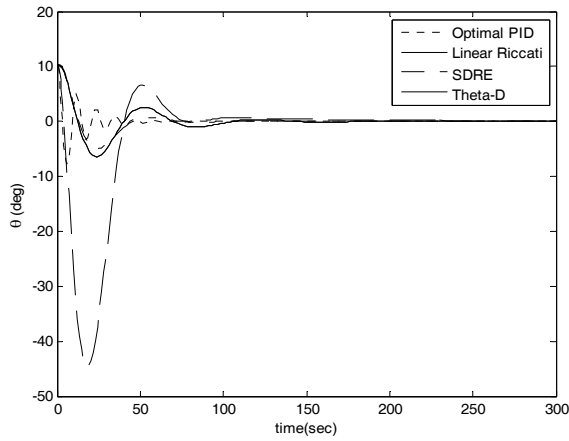


شکل ۶- سرعت زاویه‌ای  $\omega_z$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

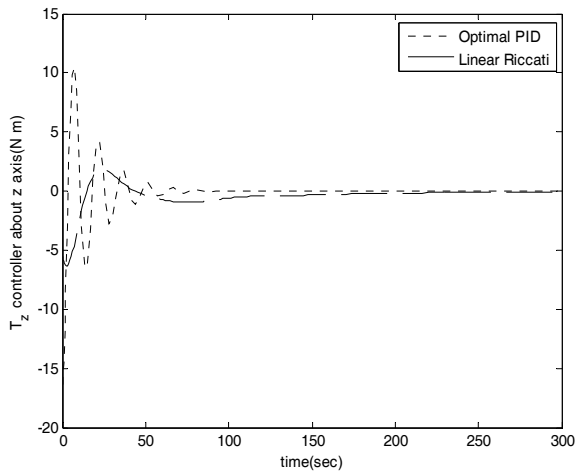
البته در روش تنظیم‌کننده مربعی خطی، نمودار تقریباً فراجاهش اولیه بزرگی نسبت به روش‌های غیرخطی دارد، که این فراجاهش در زاویه  $\theta$  به اوج خود رسیده است. اگرچه به سرعت به مقدار ثابت صفر همگرا شده است، این تغییرات ناگهانی در زوایای اولر مطلوب نیست.



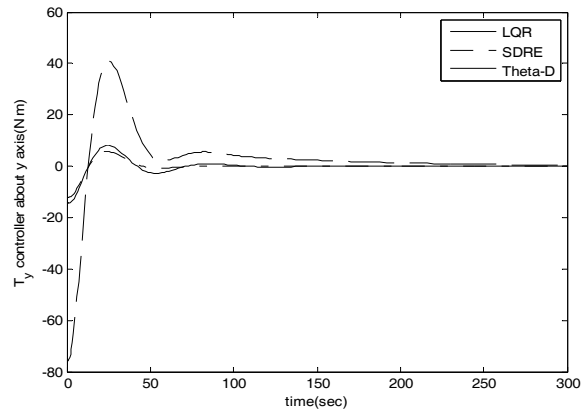
شکل ۱۱- رفتار زاویه  $\psi$  بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و PID بهینه و ریکاتی خطی



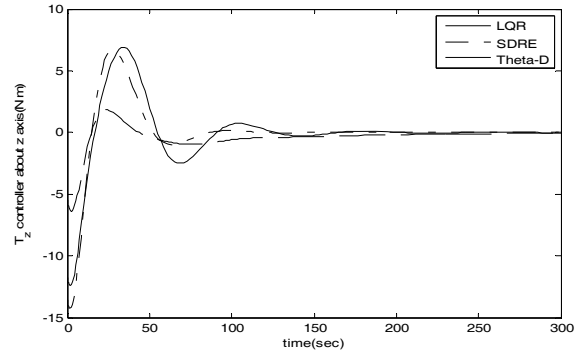
شکل ۱۲- رفتار زاویه  $\theta$  بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و PID بهینه و ریکاتی خطی



شکل ۱۳- رفتار زاویه  $\phi$  بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و PID بهینه و ریکاتی خطی

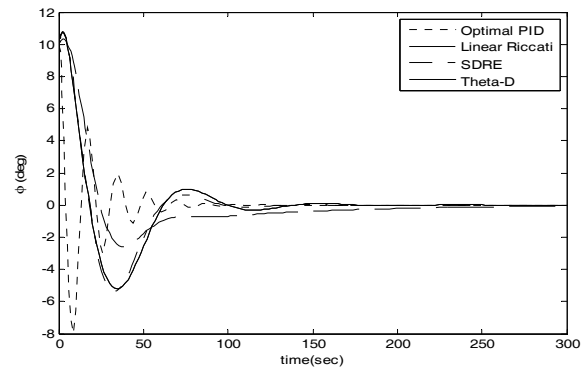


شکل ۸- گشتاور  $T_y$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D



شکل ۹- گشتاور  $T_z$  بر اساس روش‌های LQR، SDRE و Theta-D

شکل‌های (۱۰) الی (۱۲) نشان‌دهنده همگرایی سریع وضعیت سیستم به مقادیر ورودی مرجع برای روش PID بهینه و ریکاتی خطی هستند. اگرچه روش کنترلی PID بهینه سرعت بالایی در میان روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی دارد، اما مطابق با شکل‌های (۱۳) تا (۱۵) سبب نوسانی شدن پاسخ سیستم و تلاش کنترلی و تحمیل قوانین کنترلی بزرگ به عملگرها خواهد شد که این مسئله مطلوب نخواهد بود. همچنین از شبیه‌سازی‌ها پیداست که روش ریکاتی خطی تلاش کنترلی کمتری نسبت به PID بهینه تولید می‌کند.

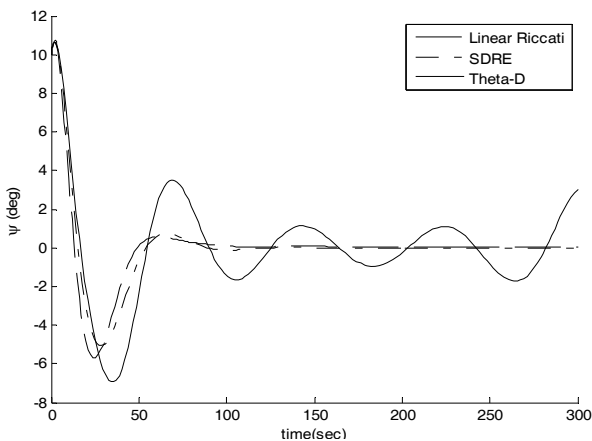


شکل ۱۰- رفتار زاویه  $\phi$  بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و PID بهینه و ریکاتی خطی

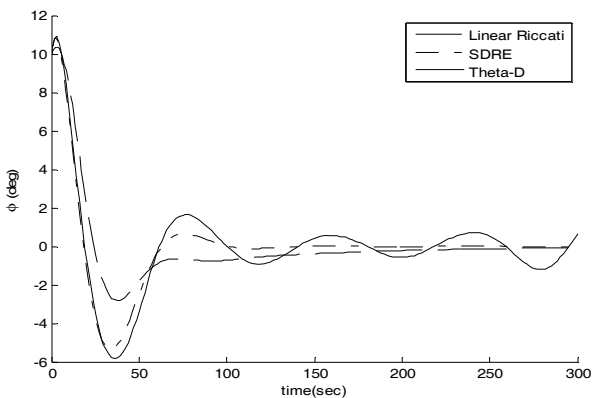


پارامتری کوچک، به بررسی مقاومت روش‌های SDRE و ریکاتی خطی در برابر عدم قطعیت‌های جرمی بزرگ پرداخته خواهد شد. در این قسمت از عدم قطعیت پارامتری بزرگ برای سنجش مقاومت روش‌های ریکاتی خطی و SDRE استفاده شده است. شکل (۱۹) الی (۲۱) نشان می‌دهد که روش بهینه وابسته به حالت‌های سیستم مقاومت بسیار بهتری نسبت به نامعینی‌ها پارامتری بزرگ دارد و بعد از چند نوسان کوچک به مبدأ همگرا می‌شود که این مسئله به دلیل ذات سیستم کنترلی برای تولید قانون کنترلی جدید در هر لحظه است هرچند که پارامترهای جرمی سیستم دستخوش تغییر شده باشد.

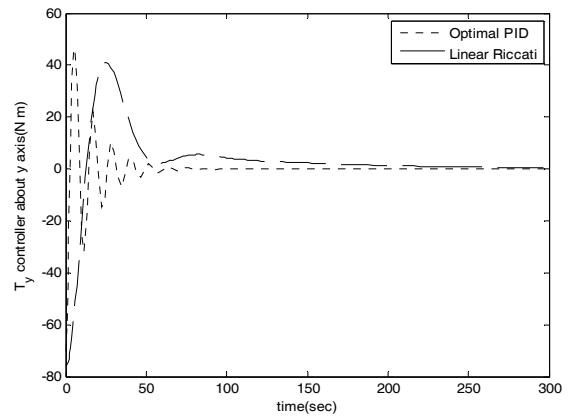
همان‌طور که مشاهده شد، در میان سه روش کنترلی Theta-D و SDRE و ریکاتی خطی، تکنیک Theta-D کمترین مقاومت را در برابر عدم قطعیت‌های پارامتری دارد و روش SDRE به راحتی می‌تواند نامعینی‌های پارامتری بزرگ سیستم را جبران کند.



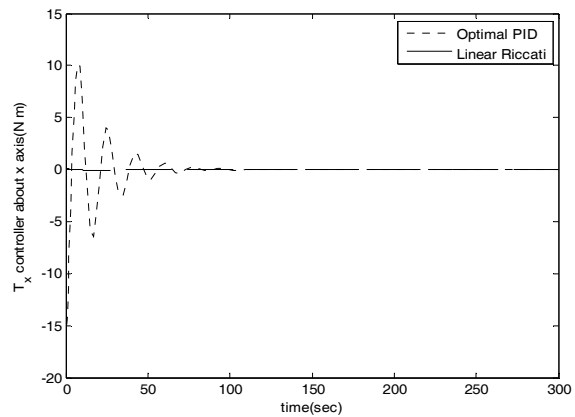
شکل ۱۶- رفتار زاویه  $\psi$  با ورود عدم قطعیت پارامتری کوچک در SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی



شکل ۱۷- رفتار زاویه  $\phi$  با ورود عدم قطعیت پارامتری کوچک در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی



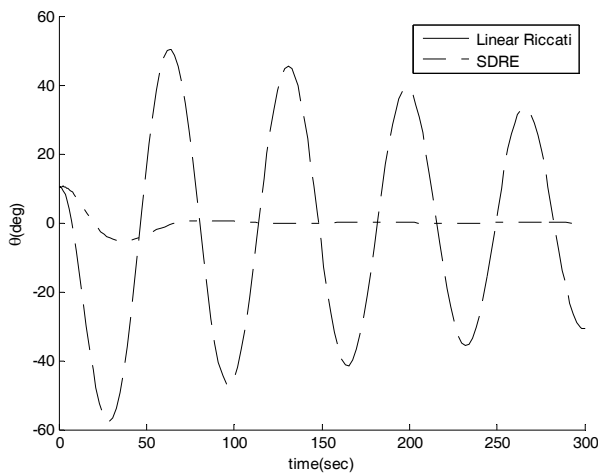
شکل ۱۴- گشتاور  $T_y$  براساس روش‌های PID بهینه و ریکاتی خطی



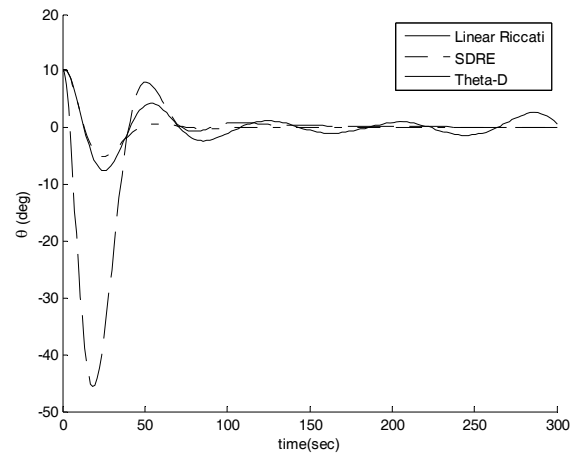
شکل ۱۵- گشتاور  $T_x$  براساس روش‌های PID بهینه و ریکاتی خطی

## بررسی کارایی روش‌های کنترلی تحت تأثیر عدم قطعیت‌ها

از آنجاکه فضاپیما در حین انجام مأموریت تحت تأثیر عدم قطعیت‌ها قرار می‌گیرد، بنابراین، برای سنجش مقاومت ذاتی سیستم‌های کنترلی در برابر این عدم قطعیت‌ها از نامعینی‌های جرمی کوچک و بزرگ در مقاله استفاده شده است. ابتدا، از یک نامعینی پارامتری کوچک برای مقایسه سه روش ریکاتی خطی و SDRE و Theta-D استفاده شده و در ادامه با ورود عدم قطعیت‌های پارامتری بزرگ به سیستم، دو روش ریکاتی خطی و SDRE مقایسه شده‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل (۱۶) الی (۱۸) نشان داده شده است. روش Theta-D با اضافه کردن نامعینی پارامتری کوچکی، قادر به پایدارسازی سیستم نبوده و کنترلی بر روی وضعیت سیستم ندارد و این در حالی است که کنترلرهای مبتنی بر ریکاتی خطی و SDRE به راحتی قابلیت جبران عدم قطعیت‌های موجود در سیستم را دارند. با دانستن ضعف روش Theta-D در سیستم، بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی جبران عدم قطعیت‌های



شکل ۲۱- رفتار زاویه  $\theta$  با ورود عدم قطعیت‌های پارامتری بزرگ در سیستم براساس روش‌های SDRE و ریکاتی خطی



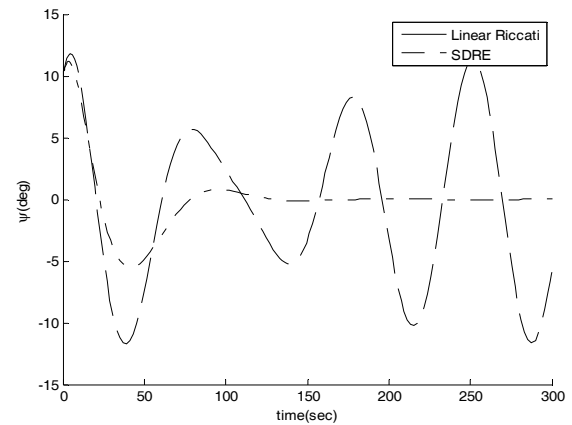
شکل ۱۸- رفتار زاویه  $\theta$  با ورود عدم قطعیت پارامتری کوچک در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و Theta-D و ریکاتی خطی

### نتیجه‌گیری

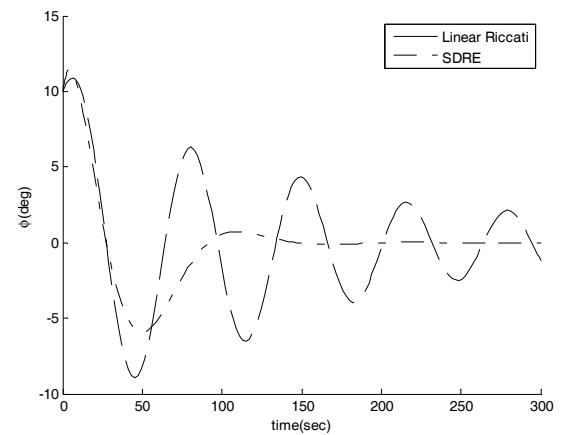
از نتایج شبیه‌سازی استنتاج می‌شود که هر دو روش ریکاتی وابسته به حالت و تتا-دی، به خوبی توانستند شرایط مطلوبی را در جهت کنترل وضعیت فضاپیما با معادلات دینامیکی غیرخطی و با وجود شرایط اولیه در زوایای اولر فراهم کنند و وضعیت آن را به شرایط پایدار برسانند. اما زمان پاسخ‌دهی و همگرایی در روش Theta-D کمتر از روش کنترلی ریکاتی وابسته به حالت است که دلیل این مسئله به علت ساده‌سازی معادله ریکاتی از طریق بسط سری توانی آن است. روش‌های بیان شده بدون حذف المان‌های غیرخطی به کنترل وضعیت زیرسیستم فضاپیما پرداخته و حل نزدیک بهینه‌ای را برای سیستم نتیجه می‌دهند. از نتایج می‌توان دریافت روش تتا-دی روشی کارآمد در حل مسائلی است که زمان مهم‌ترین رکن در حل آن است. اما ورود عدم قطعیت‌های پارامتری عملکرد سیستم کنترلی را تحت تأثیر قرار داده و سبب افزایش زمان همگرایی حالت‌های سیستم به ورودی مرجع و ناپایداری سیستم حلقه بسته فضاپیما خواهد شد. در این میان، تنها روش کنترل بهینه غیرخطی ریکاتی وابسته به حالت، به‌واسطه داشتن یک الگوریتم مؤثر برای کنترل‌های فیدبک غیرخطی ترکیبی با وجود عوامل غیرخطی وابسته به حالت در خود، توانایی جبران عدم قطعیت‌های پارامتری کوچک و بزرگ را دارد.

### مراجع

- [1] Luiz, C., Souza, G.D. and Arena, M. R., "Using State-Dependent Riccati Equation and Kalman Filter Techniques to Design a Satellite Attitude Control Simulator," *AIAA Conference on Dynamics and Control of Space System*, 2012.



شکل ۱۹- رفتار زاویه  $\psi$  با ورود عدم قطعیت پارامتری بزرگ در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و ریکاتی خطی



شکل ۲۰- رفتار زاویه  $\phi$  با ورود عدم قطعیت پارامتری بزرگ در سیستم بر اساس روش‌های SDRE و ریکاتی خطی

- [6] Clotier, J. R. and Stansbery, D. T., "The Capability and Art of State-Dependent Riccati Equation-based Design," *American Control Conference*, Alaska, USA, 2002.
- [7] Luiz, C., Souza, G. and Arena M. R., "Design of Satellite Attitude Control Algorithm Based on the SDRE Method Using Gas Jets and Reaction Wheels," *Journal of Engineering*, Vol. 29, No. 1, 2013, p. 8.
- [8] Banks, H.T., Lewis B.M. and Tran H.T., "Nonlinear Feedback Controllers and Compensator: a State-Dependent Riccati Equation Approach," *Computational Optimization and Applications*, Vol. 37, Issue 2, 2007, pp. 177-218.
- [9] Xin M. and Balakrishna, S.N., "A New Method for Suboptimal Control of a Classes of Nonlinear Systems," *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 26, No. 1, 2005, pp. 55-83.
- [2] Cimen, T., "State-Dependent Riccati Equation Control: A Survey," *Proceeding of the 17<sup>th</sup> World Congress*, Korea, 2008.
- [3] Xin, M. and Balakrishnan, S. N., "Nonlinear H-infinity Missile Longitudinal Autopilot Design with Theta-D Method," *IEEE Conference*, Vol. 44, No. 1, 2008, pp. 408-413.
- [4] Xin, M. and Lam, Q. M., "Preserving Spacecraft Attitude Control Accuracy Using Theta-D Controller Subject to Reaction Wheel Failures," *Proceeding of the AIAA InfoTech Conference*, 2010.
- [5] Xin, M. and Lam, Q. M., "Robustness Evaluation of Theta-D Technique for Spacecraft Attitude Control Subject to Reaction Wheel Failures," *Proceeding of the AIAA InfoTech Conference*, 2010.