JSST
Journal of Space Sience and Technology

Vol. 16 / Issue 3 / 2023 / (No. 57)
Print ISSN: 2008-4560 / Online ISSN: 2423-4516
https://doi.org/10.30699/jsst.2023.1349

OPEN ACCESS

Pages: 15-26 / Research Paper / Received: 07 June 2021 / Revised: 16 August 2021 / Accepted: 21 September 2021

Journal Homepage: https://jsst.ias.ir

Form-Finding and Free Vibration Analysis of a Class-One Triplex Tensegrity Prism

Milad Azimi[1*] and Samad Moradi[2]

1. Assistant Professor, Aerospace Research Institute of Iran Ministry of Science, Technology and Research, Tehran, Iran
2. M.Sc., Islamic Azad University, North Tehran Branch, Tehran, Iran

*Corresponding Author's E-mail: azimi.m@ari.ac.ir

Abstract

This paper deals with form-finding and free vibration analysis of a pre-stressed class-one triplex tensegrity structure. The form-finding is performed via a two-step procedure, the nodal coordinates connectivity matrix, and structural element force density determination. Accordingly, the possible states for the nodal coordinates and the structural force density of the triplex prism have been determined by trial and error (based on topology and member type knowledge) to satisfy the force density, and equilibrium matrices rank requirements. Based on different structural topologies, the equation of the motion in the frequency domain for free vibration analysis of the system is derived using the spectral element approach and dynamic shape functions. Simulations are provided for different system heights and the top-bottom aria ratios and compared with the finite element method. The numerical simulations in the form of a comparative study of the natural frequencies of triplex tensegrity prism with different heights and cross-sections represent the system's robustness with different topologies for single or multi-stage applications.

Keywords: Class-one tensegrity, Form-Finding, Natural frequency, Spectral element, Vibration

1. Introduction

Nowadays, there is growing interest in cost-effective deploying structures with space applications such as solar panels, antennas, gravity gradient booms, etc., considering launch vehicle constraints while maintaining stability and structural configuration specifications. Tensegrities are self-equilibrated, pin-connected stable systems with internal mechanisms [1, 2]. These systems consist of two main structural members; rods as compressive members and strings as tensile members, which are unstable without pre-stressing states.

The most basic issue in the design of such systems compared to other pre-stressed structures is the optimal configuration or, in other words, form-finding. This approach focuses on determining the appropriate amount of pre-stressing and node positions that can create a stable tensegrity structure based on a given topology [3].

Analytical methods are the simplest methods in the formulation of such problems. For symmetrical structures, the equilibrium equations of the structure can be simplified to the governing equations of the system nodes.

On the other hand, axial pre-stressing structures can seriously affect dynamic characteristics such as natural frequencies and vibrational behavior of the system. In the case of strong external disturbances, a tensegrity structure can become unstable or fail. Therefore, it is important to predict the precise behavior of dynamic features such as axial pre-stressing structures to achieve a safe design [4].

2. Form-finding and dynamic equations of motion

The structural system, which is shown in Figure (1), consists of six nodes (n) and $\bar{n}=12$ element, with two different interconnected cables (top-bottom triangles and bracing cables) and struts. The top triangle is twisted with respect to the z-axis by α.

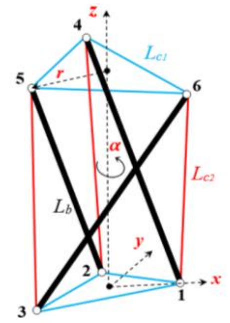


Figure 1. Flexible spacecraft model

How to cite this article:
M. Azimi and S. Moradi, "Form-Finding and Free Vibration Analysis of a Class-One Triplex Tensegrity Prism," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 16, No. 3, pp. 15-26, 2023 (in Persian), https://doi.org/10.30699/jsst.2023.1349.

The stability of N-dim undetermined tensegrity structure with no external disturbances can be proved such that we have:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_t &= \left(\mathbf{K}_g\right)+\left(\mathbf{K}_m\right) > \mathbf{0} \\
&= \left(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{E}}^T\right)+\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{E}}\,diag\left[\frac{AE}{L}\right]_k\tilde{\mathbf{E}}^T\right) > 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

where E is the elasticity modulus, $\mathbf{K}_t$ is the tangent stiffness matrix, $\mathbf{D}=\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{q}$ is the force density matrix which has to be positive semi-definite ($rank(\mathbf{D})<n-N$), $\tilde{\mathbf{E}}$ is the equilibrium matrix (with $rank(\tilde{\mathbf{E}})<\bar{n}$), and $\mathbf{q}$ is the force-density vector:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{C}^T diag\left[\mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{C}\mathbf{y} \quad \mathbf{C}\mathbf{z}\right]^T \\
\mathbf{q} &= \left[\mathbf{q}_b^{1\times n_b} \quad \mathbf{q}_{C1}^{1\times n_{C1}} \quad \mathbf{q}_{C2}^{1\times n_{C2}}\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

where $\mathbf{C}$ is the connectivity matrix. Using the Hamiltonian approach with SEA, the dynamic equations of the motion of the system with boundary conditions can be obtained as follows:

$$
\begin{aligned}
&-\omega^2\rho A Z(x)-\bar{P}_x Z''(x)=P(x) \\
&@x=0\begin{cases}F_a(0)=-F_a \\ Z(0)=Z_a\end{cases},\ @x=L\begin{cases}F_b(L)=F_b \\ z(L)=Z_b\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

where $\bar{P}_x$ is the constant pre-stressed load, ω_n is the natural frequency, $Z(x)$ and F are the nodal displacement and forces, respectively.

3. Simulation results and discussion

The simulations are divided into two parts: form-finding and free vibration analysis of the triplex tensegrity structure. The rotation angle of the upper and lower triangles for equilibrium states is considered to be $\alpha=(3k-1)/6,\ (k=2,4,6,\ldots)$, the tensegrity structural properties to calculate the coordinates of the nodes are, $L_{c1}=0.5(m)$, $L_{c2}=1.128(m)$, $L_b=1.25(m)$, $H=1.118(m)$, $k=2$, $r=0.288(m)$. Assuming a unitary tensile strength for the upper and lower cables (c_1), the tensile coefficients for the bracing cables (c_2) and strings can be scaled without affecting the self-equilibrium conditions of the prism. According to the nodal coordinates, $rank(\tilde{\mathbf{E}})=11$, hence we have minimum requirements for $rank(\tilde{\mathbf{E}})<\bar{n}$.

Considering $\bar{P}_x=800(\mathbf{q}^i.\mathbf{x}^i)_{b,L_{c1},L_{c2}}(N)$ and $\rho A=0.0314(kg/m)$ the natural frequencies and the corresponding amplitudes for $H_1=1.1187(m)$ and $H_2=1.3925(m)$ which is calculated for $L_{b1}=1.25(m)$ $L_{b1}=1.50(m)$ and are shown in Table 1 and Fig. (2).

Table 1. Natural frequencies for H_1 and H_2

H./Freq.	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
H_1	98.84	112.8	197.7	225.7	296.5
H_2	88.74	112.8	177.5	225.7	266.2
FEM (H_1)	105.16	120.29	211.04	241.42	315.15

Table 2. Natural frequencies for L_{c1_T}/L_{c1_B}=0.4, 0.8

Area R. /Freq.	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
L_{c1_T}/L_{c1_B}=0.4	98.84	112.8	197.7	225.7	296.5
L_{c1_T}/L_{c1_B}=0.8	114.9	127.2	148.4	229.9	254.4

It should be noted that one of the reasons for such analysis is mass optimization according to reducing the number of stages especially for space deployment applications.

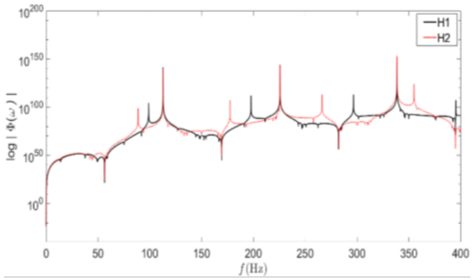


Figure 2. Frequency response for H_1 and H_2

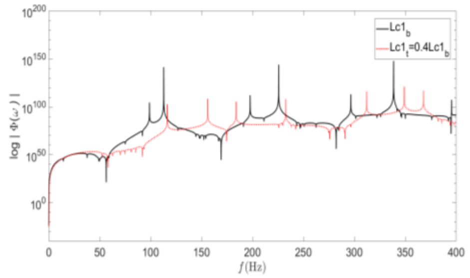


Figure 3. Frequency response for L_{c1_t}/L_{c1_b}=0.4

As can be seen, as the height of the structure increases, the natural frequencies decrease and the average amplitude increases (when the length of the system bars increases by 25%).

Another analysis is form-finding based on different top triangles dimensions to increase force density coefficients, to reduce the mass and to increase the natural frequencies of the system Fig 3.

4. Conclusion

The form-finding and vibration analysis of a triplex tensegrity system using SEA was performed. This approach is made by providing rank condition requirements for equilibrium and force density matrixes based on different system height and top-bottom aria ratios. The proposed approach provides not only a good basis for the use of numerical techniques in form-finding of large complex structures but also the additional modal analysis is a suitable assistant for dynamic form-finding of complex tensegrities with limited knowledge of the topology and structural materials.

5. References

[1] K. Yildiz and G. A. Lesieutre, "Sizing and prestress optimization of Class-2 tensegrity structures for space boom applications," *Engineering with Computers*, pp. 1-14, 2020.

[2] A. M. Popescu, R. Goyal, and M. Majji, "Design and Control of a Tensegrity Torus Spacecraft Composed of Reconfigurable Units," in *AIAA Scitech 2021 Forum*, 2021, p. 1387.

[3] Y. Wang, X. Xu, and Y. Luo, "Topology design of general tensegrity with rigid bodies," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 202, pp. 278-298, 2020.

[4] N. Ashwear and A. Eriksson, "Vibration health monitoring for tensegrity structures," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 85, pp. 625-637, 2017.

دوره ۱۶ / شماره ۳ / ۱۴۰۲ / (پیاپی ۵۷)
شاپای چاپی: ۴۵۶۰- ۲۰۰۸ / شاپای الکترونیکی: ۴۵۱۶-۲۴۲۳
https://doi.org/10.30699/jsst.2023.1349
ص. ص. ۲۶-۱۵/ مقاله علمی- پژوهشی / دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷ / بازنگری: ۱۴۰۰/۰۵/۲۵ / پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۳۰
Journal Homepage: https://jsst.ias.ir

فرم‌یابی و تحلیل ارتعاشات آزاد منشور تنسگریتی نوع اول سه میله‌ای

میلاد عظیمی[۱*] و صمد مرادی[۲]

۱- پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، تهران، ایران

***ایمیل نویسنده مخاطب: azimi.m@ari.ac.ir**

چکیده

این مقاله به ایجاد یک بستر محاسباتی برای مسئله فرم‌یابی و تحلیل ارتعاشات سازه سه میله‌ای با پیش تنش محوری پرداخته است. فرایند فرم‌یابی به واسطه تعیین ماتریس‌های اتصال در قالب دو مرحله تعیین مختصات گره‌ها و چگالی نیروی اعضاء انجام شده است. به‌طوریکه با سعی و خطاء، حالت‌های ممکن برای مختصات گره‌ها و چگالی نیروها صرفاً با اطلاع از توپولوژی و نوع اعضاء تا ارضاء الزامات رنک در ماتریس‌های چگالی نیرو و تعادل تعیین شده است. سپس معادلات حرکت و تحلیل ارتعاشات آزاد در قالب فرکانس‌های طبیعی سیستم با بکارگیری روش المان طیفی و استفاده از شکل مودهای دینامیکی استخراج شده است. شبیه‌سازی‌ها برای ارتفاع‌های مختلف سیستم و نسبت مساحت سطح فوقانی به سطح پایینی ارائه و با روش المان محدود مقایسه شده است. نتایج حاصل در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای برای فرکانس‌های طبیعی توپولوژی‌های مختلف سازه تنسگریتی سه میله‌ای، بیانگر میزان قوام فرم‌های مختلف سازه برای کاربردهای تک یا چند بخشی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات، المان طیفی، تنسگریتی نوع اول، فرم‌یابی، فرکانس طبیعی

علائم و اختصارات

بردار چگالی نیرو	**q**
بارگذاری خارجی بر روی هر گره	**p**
ماتریس تعادل سیستم	$\tilde{\mathbf{E}}$
ماتریس سفتی هندسی	$\mathbf{K}_g$
ماتریس سفتی ماده	$\mathbf{K}_m$
مدول الاستیسیته	E
سطح مقطع	A
طول	L
ماتریس واحد	**I**
ضرب کرونکر	$\otimes$

مقدمه

امروزه تمایل و علاقه فزاینده‌ای به سازه‌های بازشونده و مقرون به‌صرفه با کاربردهای فضایی مانند پنل‌های خورشیدی، آنتن‌ها و بوم‌ها با ملاحظات محدودیت حامل‌ها در عین حفظ شکل و پایداری دینامیکی مشاهده می‌شود [۱-۴]. سازه‌های تنسگریتی سیستم‌های نامعین استاتیکی و سینماتیکی اتصال‌پینی بوده که دارای حالت‌های خودتنش و مکانیزم داخلی هستند [۵-۹]. این سازه‌ها متشکل از دو بخش اصلی یا دو عضو سازه‌ای (عضوهای سازه‌ای فشاری یا میله‌ها و عضوهای سازه‌ای کششی یا ریسمان) می‌باشند. سیستم‌های تنسگریتی بدون حالت‌های پیش‌تنیدگی ناپایدار بوده و تحمل

۱ . استادیار

۲ . کارشناسی ارشد

بارگذاری ندارند. به‌این‌ترتیب شرایط پیش‌تنیدگی اولیه‌ای باید برای حفظ پیکربندی با تعادل پایدار و افزایش ظرفیت تحمل بار در این سازه‌ها ایجاد شود. سازه‌های تنسگریتی به جز کاربردهای فضایی در سایر زمینه‌های مهندسی مانند مکانیک، بیومکانیک، روباتیک و عمران مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰-۱۳].

ابتدایی‌ترین مسئله مطرح در طراحی این سازه‌ها در مقایسه با سایر سازه‌های پیش‌تنیده پایدار، انتخاب و تعیین شکل بهینه آنها و یا به عبارتی فرم‌یابی آنها می‌باشد (به عنوان مثال موقعیت گره‌ها) [۱۴]. فرم‌یابی بر تعیین میزان پیش‌تنیدگی مناسب و موقعیت‌های گره‌ای که بتواند یک سازه پایدار تنسگریتی را بر اساس توپولوژی داده شده ایجاد کند متمرکز است. اگر در طی فرایند طراحی، توپولوژی اعضاء و موقعیت گره‌ای معین و ثابت باشد، فرایند فرم‌یابی تبدیل به یک مسئله کاهش یافته در فرم‌یابی مانند نیرویابی یا تعیین میزان پیش‌تنیدگی می‌شود [۱۵]. طراحی فرم سازه‌های تنسگریتی با و بدون تأثیر بارهای خارجی توجه بیشتری را به خود جلب کرده است [۱۶, ۱۷].

مطالعه سازه‌های تنسگریتی مبتنی بر هندسه آنها خصوصا چند وجهی‌های منتظم مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است [۱۸]. همچنین فرم‌یابی سازه‌های تنسگریتی خودتنیده از طریق روش‌های تحلیلی یا عددی انجام می‌پذیرد. مطالعات مروری جامعی بر روش‌های فرم‌یابی سازه‌های تنسگریتی صورت پذیرفته است [۱۹, ۲۰]. روش‌های تحلیلی از جمله ساده‌ترین روش‌ها در مسائل فرم‌یابی به شمار می‌روند. برای سازه‌های متقارن، معادلات تعادل کل سازه را می‌توان به معادلات حاکم بر گره‌های سیستم ساده کرد. روش چند-پارامتری تحلیلی برای تعیین همزمان چندین پارامتر (مختصات گره‌ها و اعضاء پیش‌تنیده) در یک مسئله فرم‌یابی ارائه شد [۲۱]. کوهستانی[۳] یک ساختار فرم‌یابی تحلیلی را بر اساس الگوریتم فادیو-لوریر[۴] ارائه داد تا تحلیل صریحی برای سازه‌های تنسگریتی خودتنیده ایجاد کند [۲۲]. روش آرام‌سازی دینامیکی و روش چگالی نیرو برای مسئله فرم‌یابی شبکه‌ای از ریسمان‌ها و المان‌های تحت تنش توسعه داده شده است [۲۳, ۲۴]. اگرچه روش آرام‌سازی دینامیکی برای سازه‌های تنسگریتی بزرگ مناسب نمی‌باشد. از طرف دیگر روش چگالی نیرو یکی از روش‌های پرکاربرد برای فرم‌یابی سازه‌های تنسگریتی می‌باشد [۲۵, ۲۶]. یک رویکرد تحلیلی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های مشخصه ماتریس چگالی نیرو نیز توسط ژانگ[۵] و همکاران ارائه شد [۲۷]. باید به این نکته توجه داشت که روش‌های تحلیلی برای تحلیل سازه‌های تنسگریتی با توپولوژی‌های پیچیده و تعداد زیاد اعضاء موثر نمی‌باشند. این روش‌ها برای سیستم‌های نسبتا ساده و متقارن مناسب بوده در حالیکه روش‌های عددی برای سیستم‌های بزرگ و نامتقارن نیز کاربردی هستند. از طرف دیگر برای غالب سیستم‌های تنسگریتی، تحلیل‌های فرم‌یابی تنها با روش‌های عددی قابل انجام است. فرم‌یابی این سازه‌ها را می‌توان به یک مسئله غیرخطی که در آن طول کل میله‌ها (یا ریسمان‌ها) تحت شرایطی که طول کل ریسمان‌ها (یا میله‌ها) معین و ثابت باشد، بیشینه (کمینه) شود، تبدیل کرد [۲۸]. اگرچه تحلیل‌های غیرخطی برای سازه‌های بزرگ هزینه‌بر و مشمول زمان خواهند شد. با معرفی روش‌های چگالی نیرو، معادلات غیرخطی تعادل را می‌توان خطی‌سازی کرد و معادلات خودتعادل سیستم را می‌توان با شرط کمبود رنک ماتریس چگالی نیرو تعیین کرد [۲۹, ۳۰]. با این حال، روش چگالی نیرو به طور مستقیم نمی‌تواند پارامترهای هندسی سازه را کنترل کند و نیاز به مختصات گره‌ای یا ابعاد المان‌های سیستم برای تعیین پیکربندی نهایی می‌باشد. یکی از روش‌های موثر برای تحلیل‌های سازه‌ای، روش المان محدود می‌باشد که برای فرم‌یابی سیستم‌های تنسگریتی نیز به‌کار برده می‌شود [۳۱, ۳۲].

سازه‌های پیش‌تنیده محوری مانند سیستم‌های تنسگریتی می‌توانند مشخصه‌های دینامیکی مانند فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی سیستم را به طور جدی متاثر سازند. در شرایطی که سیستم در معرض ارتعاشات شدید قرار می‌گیرد، یک سازه تنسگریتی می‌تواند دچار ناپایداری یا شکست شود. بنابراین پیش‌بینی رفتار دقیق مشخصه‌های دینامیکی مانند سازه‌های پیش‌تنیده محوری برای دستیابی به یک طراحی ایمن مهم است. مودهای ارتعاشی یک سیستم تنسگریتی متغیر با فرکانس‌های ارتعاشی و طول موج‌های متناسب با آن است. به منظور استخراج پاسخ‌های دقیق دینامیکی این سیستم‌ها نیاز است که تمام مودهای فرکانس بالای سیستم نیز در تحلیل‌ها در نظر گرفته شوند. از آنجا که روش‌های رایج المان محدود مبتنی بر توابع شکل چند جمله‌ای مستقل از فرکانس می‌باشند، این روش نمی‌تواند تمام مودهای فرکانس بالا را رصد کند [۳۳, ۳۴]. با استفاده از توابع شکلی توسعه یافته مبتنی بر فرکانس‌های طبیعی (توابع شکلی دینامیکی)، می‌توان پاسخ‌های دقیق‌تری از سیستم دریافت کرد. این رویکرد در روش سفتی دینامیکی[۶] جمع‌بندی می‌شود. این روش تعداد نامحدودی از پاسخ‌های ویژه را با استفاده از ماتریس سفتی دینامیکی ایجاد می‌کند [۳۵, ۳۶].

از جمله رویکردهای نوین به کار گرفته شده در این مقاله برخلاف روش‌های رایج تحلیل ارتعاشی سازه‌های تنسگریتی که غالبا المان محدود است، استفاده از توابع شکلی دینامیکی (وابسته به فرکانس و طول موج‌های ارتعاشی) برای یک منشور سه میله‌ای با

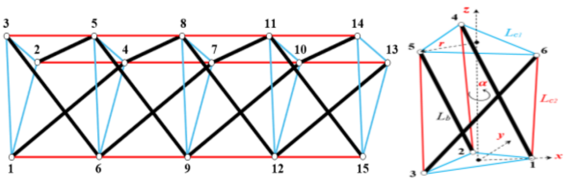
3. Koohestani
4. Faddeev-LeVerrier
5. Zhang
6. Dynamic Stiffness Method

فرم‌های مختلف می‌باشد. این روش با استفاده از ماتریس سفتی دینامیکی دقیق (مبتنی بر کمترین تعداد درجات آزادی)، و لحاظ مودهای فرکانس بالا در تحلیل‌ها منجر به استخراج فرکانس‌های طبیعی دقیقتر سیستم خواهد شد. در این مقاله پس از فرم‌یابی یک منشور سه میله‌ای با استفاده از روش چگالی نیرو و ارزیابی پایداری سیستم، معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون استخراج، و با بکارگیری روش سفتی دینامیکی، کاهش مرتبه یافته و با پیاده‌سازی روش المان طیفی[۷] [۳۷, ۳۸]، تحلیل ارتعاشات سیستم صورت پذیرفته است. فرکانس‌های طبیعی سیستم نیز در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای برای ارتفاع‌ها و نسبت‌های مختلف سطح فوقانی به سطح تحتانی استخراج شده است.

محتوای مقاله به این صورت می‌باشد که پس از مرور بر تحقیقات صورت گرفته در حوزه فرم‌یابی و تحلیل ارتعاشات سیستم‌های تنسگریتی، در بخش دوم، فرم‌یابی منشور سه میله‌ای مبتنی بر روش چگالی نیرو و شروط پایداری توصیف شده است. مدل دینامیکی سیستم با استفاده از رویکرد تحلیل طیفی و اصل همیلتون استخراج و تحلیل فرکانسی در بخش سوم صورت پذیرفته است. بخش چهارم به ارائه شبیه‌سازی‌ها و مقایسه فرکانس‌های طبیعی سیستم تنسگریتی برای فرم‌های مختلف می‌پردازد و نتیجه‌گیری نیز در بخش پنجم ارائه شده است.

فرم‌یابی منشور سه میله‌ای تنسگریتی

یک سازه تنسگریتی سه وجهی شامل ۱۲ عضو و ۶ گره به مانند آنچه که در شکل (۱) نمایش داده شده است در نظر بگیرید. سه گره در پایین و بالای منشور یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده‌اند. استفاده از مختصات استوانه‌ای برای ایجاد این سازه مناسب‌ترین روش در تحلیل‌ها است. همانطور که می‌توان در شکل (۱) مشاهده کرد، وجه بالای منشور تنسگریتی حول محور **z** به اندازه α دوران کرده است. مرکز هر دو وجه بالایی و پایینی بر روی محور **z** قرار گرفته است. گره‌های وجه پایینی با اعداد ۱-۳ و گره‌های متناظر آنها در وجه بالایی با اعداد ۴-۶ شماره‌گذاری شده‌اند. به واسطه تساوی اضلاع مثلث وجوه بالایی و پایینی گره‌های ۱-۳ و ۴-۶ به فاصله یکسان از مرکز با فاصله r قرار گرفته‌اند.



شکل ۱. سازه تنسگریتی سه میله‌ای، الف) تک بخشی ب) نحوه مونتاژ

7. Spectral Element Approach (SEA)

برای مشخص کردن مختصات هر یک از نقاط در مختصات قطبی $i\,(r, z, \alpha)$ داریم:

$$\begin{aligned} &O_1(r,0,0) && \rightarrow && O_4(r,H,\alpha) \\ &O_2\,(r,0,\frac{2\pi}{3}) && \rightarrow && O_5(r,H,\alpha+\frac{2\pi}{3}) \\ &O_3\,(r,0,-\frac{2\pi}{3}) && \rightarrow && O_6(r,H,\alpha-\frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \qquad (۱)$$

به این ترتیب میله‌ها در قالب عضوهای فشاری با رنگ مشکی و با مختصات 14، 25 و 36 و با طول L_b، کابل‌های وجوه بالایی و پایینی با طول L_{c1} و کابل‌های اتصال دو وجه بالا و پایین با طول L_{c2} در قالب کابل‌های پشتیبان و با مختصات 16، 24 و 35 نمایش داده شده‌اند. مختصات تعریف شده را می‌توان در قالب ماتریس اتصال میان گره i و j که با یک عضو فشاری به هم متصل شده‌اند به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{C}(i,j)=\begin{cases} 1 & @\,\text{node}\,i \\ 0 & \text{otherwise} \\ -1 & @\,\text{node}\,j \end{cases} \qquad (۲)$$

شرط لازم برای تعادل یک سیستم سازه‌ای برقراری رابطه زیر است:

$$\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{q}=\mathbf{p} \qquad (۳)$$

که در آن **q** بردار چگالی نیرو، **p** بارگذاری خارجی بر روی هر گره و $\tilde{\mathbf{E}}$ ماتریس تعادل سیستم است به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{C}^T\begin{bmatrix} diag\,(\mathbf{C}\,\mathbf{x}) \\ diag\,(\mathbf{C}\,\mathbf{y}) \\ diag\,(\mathbf{C}\,\mathbf{z}) \end{bmatrix} \\ &\mathbf{q}=\begin{bmatrix} \mathbf{q}_b^{1\times n_b} & \mathbf{q}_{C1}^{1\times n_{C1}} & \mathbf{q}_{C2}^{1\times n_{C2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۴)$$

محاسبه بردار چگالی نیرو را می‌توان از برقراری رابطه تعادل میان گره i با سایر گره‌های سیستم استخراج کرد، به‌طوری‌که:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_b^i & \Delta x_{C1}^i & \Delta x_{C2}^i \\ \Delta y_b^i & \Delta y_{C1}^i & \Delta y_{C2}^i \\ \Delta z_b^i & \Delta z_{C1}^i & \Delta z_{C2}^i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b^i \\ \mathbf{q}_{C1}^i \\ \mathbf{q}_{C2}^i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_x^i \\ P_y^i \\ P_z^i \end{Bmatrix} \quad i=1,\dots,n \qquad (۵)$$

که در آن **x**، **y** و **z** بردارهای مختصات گره‌ها و **n** تعداد گره‌ها می‌باشند. با توجه به تعریف رابطه (۳)، ماتریس چگالی نیرو **D** را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x & \mathbf{p}_y & \mathbf{p}_z \end{bmatrix}=\mathbf{D} \\ &=\mathbf{C}^T\,diag\,(\mathbf{q})\mathbf{C} \\ &=\mathbf{C}^T\,\mathbf{Q}\mathbf{C} \end{aligned} \qquad (۶)$$

به‌طوری‌که:

$$\mathbf{D}(i,j)=\begin{cases} q_k & k \text{ connected to } i \ \ for\ i\neq j \\ 0 & i \text{ disconnected from } j \\ \sum q_k & k \text{ connected to } i \ \ for\ i=j \end{cases} \quad (۷)$$

شرایط پایداری سازه را می‌توان با احراز مثبت معین بودن ماتریس سفتی مماسی تعیین کرد، به‌طوری‌که [۳۹]:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t &=\left(\mathbf{K}_g\right)+\left(\mathbf{K}_m\right)>\mathbf{0}\\ &=\left(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{E}}^T\right)+\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{E}}diag\left[\frac{AE}{L}\right]_k\tilde{\mathbf{E}}^T\right)>0\end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $\mathbf{K}_g$ ماتریس سفتی هندسی، $\mathbf{K}_m$ ماتریس سفتی ماده، E مدول الاستیسیته، A سطح مقطع، L طول، $\mathbf{I}$ ماتریس واحد و $\otimes$ ضرب کرونکر می‌باشند.

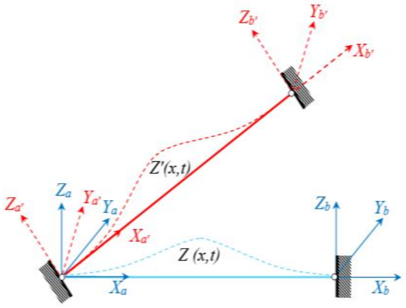
دو شرط برای رنک ماتریس‌های تعادل و چگالی نیروی یک سازه تنسگریتی N بعدی وجود دارد که می‌بایست برای شرایط خود-تنیدگی سیستم ارضاء شود. شرط اول آن است که رنک ماتریس تعادل برای اطمینان از وجود حداقل یک حالت خود-تنش $R(\tilde{\mathbf{E}})<\bar{n}$ باشد (رنک ماتریس $\tilde{\mathbf{E}}$ باید کمتر از تعداد اعضاء $\bar{n}$ باشد) که شرط لازم برای پاسخ غیربدیهی فرم همگن معادله (۳) است. پایداری یک سازه تنسگریتی نامعین استاتیکی N بعدی را می‌توان در شرایطی که بارگذاری خارجی وجود نداشته اما دارای مکانیزم‌های غیرکششی $\mathbf{\Gamma}$ باشد تعیین کرد، به‌طوری‌که:

$$\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Phi}_L^T diag\left(\mathbf{D}\right)\mathbf{\Phi}_L \quad (۹)$$

که در آن $\mathbf{\Phi}_L$ ماتریس حاوی بردارهای چپ-تکین حاصل از تجزیه مقدار تکین ماتریس $\tilde{\mathbf{E}}$ می‌باشد. ماتریس $\mathbf{\Gamma}$ مثبت نیمه معین است اگر ماتریس $\mathbf{D}$ مثبت نیمه معین باشد. برای نیمه معین شدن ماتریس مثبت $\mathbf{D}$ شرط $R(\mathbf{D})<n-N$ باید برقرار باشد [۴۰]. البته باید خاطر نشان کرد که این شرط لزوما برای تمام سیستم‌های تنسگریتی برقرار نمی‌باشد. بنابراین، بازاء ماتریس مثبت $\mathbf{D}$، جابجایی‌های غیر کششی (به جز حرکات جسم صلب) با استفاده از تحلیل مقدار ویژه $eig(\mathbf{\Gamma})=\left[\lambda_R>\ldots\lambda_1>0=\lambda_r=\ldots=\lambda_1\right]$ محاسبه خواهد شد که در آن λ_R سفتی‌های مثبت (که معیاری برای تعیین تعداد حالت‌های خود-تنشی سیستم می‌باشند) و λ_r حرکت‌های جسم صلب می‌باشند.

استخراج معادلات حرکت

در این بخش معادلات حرکت سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج و پاسخ آن با به‌کارگیری روش مدلسازی المان طیفی برای اعضاء پیش‌تنیده محوری استخراج شده است. شکل (۲) یک المان پیش‌تنیده تحت بارگذاری ثابت $\bar{P}_x$ (منفی برای نیروهای فشاری و مثبت برای نیروهای کششی) را نشان می‌دهد. این المان با شرایط تکیه‌گاهی ساده، به طول L، چگالی ρ و سطح مقطع A با فرض سفتی خمشی ناچیز و ارتعاشات عرضی کوچک مفروض است.



شکل ۲. جابجایی عرضی المان تنسگریتی

انرژی جنبشی، پتانسیل و کار مجازی سیستم به ترتیب به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned}&\mathrm{T}=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A\dot{z}(x,t)^2dx\\ &\mathrm{U}=\frac{1}{2}\int_0^l \bar{P}_x z'(x,t)^2dx\\ &\delta W=\int_0^l P(x,t)\delta z(x,t)+F_a\delta z(0,t)+F_b\delta z(L,t)dx\end{aligned} \quad (۱۰)$$

با جایگذاری معادلات (۱۰) در اصل همیلتون:

$$\int_{t_0}^{t}(\delta T-\delta U+\delta W)dt=0 \quad (۱۱)$$

معادله حرکت سیستم به همراه شرایط مرزی به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\rho A\ddot{z}(x,t)-\bar{P}_x z''(x,t)=P(x,t) \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned}&@x=0\begin{cases}F_a(0,t)=-F_a(t)\\ z(0,t)=z_a(t)\end{cases}\\ &@x=L\begin{cases}F_b(L,t)=F_b(t)\\ z(L,t)=z_b(t)\end{cases}\end{aligned} \quad (۱۳)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&P(x,t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}P_n(x)e^{i\omega_n t},F(x,t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}F_n(x)e^{i\omega_n t}\\ &F_a(t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}F_{na}(t)e^{i\omega_n t},F_b(t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}F_{nb}(t)e^{i\omega_n t}\\ &z_a(t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}Z_{na}(t)e^{i\omega_n t},\ z_b(t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}Z_{nb}(t)e^{i\omega_n t}\end{aligned} \quad (۱۴)$$

$$F(x,t)=\bar{P}_x z'(x,t) \quad (۱۵)$$

و پاسخ دینامیکی سیستم در ساختار المان طیفی:

$$z(x,t)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} Z_n(x)e^{i\omega_n t} \qquad (۱۶)$$

در این معادلات Z_n و F_n (برای $(n=a,b)$) به ترتیب جابجایی‌ها و نیروهای عرضی وارد بر گره a و b، $P(x,t)$ نیروی گسترده بر واحد جرم، $Z_n(x)e^{i\omega_n t}$ مولفه‌های طیفی $z(x)$ و ω_n فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشند. با جای‌گذاری معادله (۱۴) و (۱۶) در معادله (۱۲) و (۱۳)، معادله حرکت و شرایط مرزی متناسب با آن را می‌توان در حوزه فرکانس و به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$-\omega^2\rho A Z(x)-\bar{P}_x Z''(x)=P(x) \qquad (۱۷)$$

$$@\,x=0\begin{cases}F(0)=-F_a\\ Z(0)=Z_a\end{cases} \quad , \quad @\,x=L\begin{cases}F(L)=F_b\\ Z(L)=Z_b\end{cases} \qquad (۱۸)$$

بردار درجات آزادی و نیروهای طیفی سیستم را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=\begin{bmatrix}Z_a & Z_b\end{bmatrix}^T\\ \mathbf{F}&=\begin{bmatrix}F_a & F_b\end{bmatrix}^T\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

پاسخ عمومی (۱۷) را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$Z(x)=c_1e^{-i\upsilon x} \qquad (۲۰)$$

که در آن c_1 ثابت و υ عدد موج است. با جای‌گذاری معادله (۲۰) در فرم همگن معادله (۱۷) داریم:

$$\bar{P}_x\upsilon-\rho A\omega^2=0 \qquad (۲۱)$$

که پاسخ آن برای عدد موج عبارتست از:

$$\upsilon_{1,2}=\pm\omega\sqrt{\frac{\rho A}{\bar{P}_x}} \qquad (۲۲)$$

که در آن اندیس ۱ برای عدد موج جهت انتشار آن در امتداد x و اندیس ۲ انتشار در خلاف جهت را نمایش می‌دهد. با جای‌گذاری معادله (۲۲) در معادله (۲۰) داریم:

$$Z(x)=\begin{bmatrix}e^{-i\upsilon_1 x} & e^{-i\upsilon_2 x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix} \qquad (۲۳)$$

همچنین با جای‌گذاری معادله (۲۳) در معادله (۱۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}&=\begin{bmatrix}e^0 & e^0\\ e^{-i\upsilon_1 L} & e^{-i\upsilon_2 L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\\ &=\boldsymbol{\pi}\mathbf{c}\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

با جای‌گذاری بردار $\mathbf{c}$ از معادله (۲۴) در معادله (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned}Z(x)&=\mathbf{\Psi}(x,\omega)\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\\ &=\frac{\left(e^{-i\upsilon_2 L}-e^{-i\upsilon_1 x}\right)-\left(e^{-i\upsilon_1 L}-e^{-i\upsilon_2 x}\right)}{\left(e^{-i\upsilon_2 L}-e^{-i\upsilon_1 L}\right)}\times\\ &\quad\left(-e^{-i\upsilon_1 x}-e^{-i\upsilon_2 x}\right)\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که در آن $\mathbf{\Psi}(x,\omega)$ تابع شکل دینامیکی سیستم می‌باشد. فرم ضعیف معادله حرکت (۱۷) در حوزه فرکانس را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned}&\int_0^L\left(\bar{P}_x Z'\delta Z'-\omega^2\rho A Z\,\delta Z\right)dx\\ &\quad -F(x)\delta Z\big|_0^L-\int_0^L P(x)\delta Z\,dx=0\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

باجای‌گذاری معادله (۲۵) در معادله (۲۶) داریم:

$$\begin{aligned}&\delta\mathbf{Z}^T\int_0^L\left(\bar{P}_x-\omega^2\rho A Z\,\delta Z\right)dx-\\ &\quad F(x)\delta Z\big|_0^L-\int_0^L P(x)\delta Z\,dx=0\\ &\delta\mathbf{Z}^T\Big[\int_0^L\bar{P}_x\mathbf{\Psi}'^T(x,\omega)\mathbf{\Psi}'(x,\omega)dx\\ &\quad-\omega^2\rho A\mathbf{\Psi}^T(x,\omega)\mathbf{\Psi}(x,\omega)\Big)dx\Big]\mathbf{Z}\\ &\quad=\delta\mathbf{Z}^T\left(\mathbf{F}+\int_0^L P(x)\mathbf{\Psi}^T(x,\omega)dx\right)\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}'^T(x,\omega)&=-i\begin{bmatrix}e^{-i\upsilon_1 x} & e^{-i\upsilon_2 x}\end{bmatrix}diag\left(\upsilon_1,\upsilon_2\right)\times\\ &\quad\begin{bmatrix}e^0 & e^0\\ e^{-i\upsilon_1 L} & e^{-i\upsilon_2 L}\end{bmatrix}^{-1}\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

معادله (۲۷) را می‌توان به صورت زیر به عنوان معادله المان طیفی برای یک عضو پیش-تنیده نمایش داد:

$$\mathbf{\Phi}(x,\omega)\mathbf{Z}=\bar{\mathbf{F}}(x,\omega) \qquad (۲۹)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(x,\omega)&=\int_0^L\bar{P}_x\mathbf{\Psi}'^T(x,\omega)\mathbf{\Psi}'(x,\omega)\\ &\quad-\omega^2\rho A\mathbf{\Psi}^T(x,\omega)\mathbf{\Psi}(x,\omega)dx\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

$$\bar{\mathbf{F}}(x,\omega)=\mathbf{F}+\int_0^L P(x)\mathbf{\Psi}^T(x,\omega)dx \qquad (۳۱)$$

با جای‌گذاری $\mathbf{\Psi}(x,\omega)$ از رابطه (۲۵) و $\mathbf{\Psi}'^T(x,\omega)$ از رابطه (۲۸) در معادله (۳۰)، ماتریس المان طیفی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\omega)=\boldsymbol{\pi}^T\left\{-\bar{P}_x\left(diag\left(\upsilon_1,\upsilon_2\right)\right)^T \Im(x,\omega)\left(diag\left(\upsilon_1,\upsilon_2\right)\right)-\omega^2\rho A\,\Im(x,\omega)\right\}\boldsymbol{\pi} \quad (۳۲)$$

که در آن:

$$\Im(x,\omega)=\int_0^L\left[e^{-i\upsilon_1 x}\quad e^{-i\upsilon_2 x}\right]^T\left[e^{-i\upsilon_1 x}\quad e^{-i\upsilon_2 x}\right]dx$$
$$=\begin{cases} i\left(\upsilon_1+\upsilon_2\right)^{-1}\Im(x,\omega)_0^L & for \quad \upsilon_1+\upsilon_2\neq 0\\ L & for \quad \upsilon_1+\upsilon_2=0\end{cases} \quad (۳۳)$$
$$\Im(x,\omega)_0^L=\left[e^{-i\upsilon_1 x}\quad e^{-i\upsilon_2 x}\right]^T\left[e^{-i\upsilon_1 x}\quad e^{-i\upsilon_2 x}\right]_0^L$$

فرم دیگر معادله (۳۲) را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\omega)=\frac{\bar{P}_x L}{\mathrm{E}^2}\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{bmatrix}-\frac{\omega^2\rho A L}{\mathrm{E}^2}\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_3 & \eta_4\end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

که در آن:

$$\gamma_1=\upsilon_1^2+\upsilon_2^2$$
$$\gamma_2=\gamma_3=-\left(e^{-i\upsilon_1 x}\upsilon_1^2+e^{-i\upsilon_2 x}\upsilon_2^2\right)$$
$$\gamma_4=-\left(\left(e^{-i\upsilon_1 x}\right)^2\upsilon_1^2+\left(e^{-i\upsilon_2 x}\right)^2\upsilon_2^2\right) \quad (۳۵)$$
$$\eta_1=\left(e^{-i\upsilon_1 x}\right)^2+\left(e^{-i\upsilon_2 x}\right)^2,\;\; \eta_2=\eta_3=-\bar{E}^*,\;\; \eta_4=2$$
$$\bar{E}=\left(e^{-i\upsilon_2 x}-e^{-i\upsilon_1 x}\right),\bar{E}^*=\left(e^{-i\upsilon_2 x}+e^{-i\upsilon_1 x}\right)$$

برای تبدیل مختصات در دستگاه محلی $O\left(XYZ\right)$ به دستگاه مختصات کلی $O'\left(XYZ\right)$ (شکل (۲))، باید از یک ماتریس انتقال به‌صورت زیر استفاده کرد:

$$\mathbf{DCM}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{B}_{3\times3}\end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

که در آن $\mathbf{A}_{3\times3}$ و $\mathbf{B}_{3\times3}$ به ترتیب ماتریس‌های کسینوس هادی برای انتقال دستگاه‌های مختصات محلی به گلوبال در گره‌های a و b می‌باشند. بنابراین معادله ماتریس المان طیفی مطرح شده در مختصات محلی رابطه (۲۹) را می‌توان به‌صورت زیر در مختصات گلوبال بیان کرد:

$$\left\{\left(\mathbf{DCM}\right)^T\boldsymbol{\Phi}_g(x,\omega)\left(\mathbf{DCM}\right)\right\}\mathbf{Z}_g=\bar{\mathbf{F}}_g(x,\omega) \quad (۳۷)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\Phi}_g(x,\omega)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2\\ \boldsymbol{\varphi}_3 & \boldsymbol{\varphi}_4\end{bmatrix}_{6\times6},$$
$$\boldsymbol{\varphi}_i=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{j,k}(x,\omega) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times3} \quad (i=1:4),\;(j,k=1,2) \quad (۳۸)$$

که نهایتا فرایند مونتاژ المان‌ها پس از استخراج رابطه (۳۷) برای تعداد درجات آزادی مختلف صورت خواهد پذیرفت. فرکانس‌های طبیعی سیستم با استفاده از رابطه $\left|\bar{\boldsymbol{\Phi}}_g(x,\omega)\right|=0$ استخراج خواهد شد، که در آن $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_g(x,\omega)$ ماتریس سفتی دینامیکی گلوبال پس از مونتاژ برای تشکیل سیستم تنسگریتی است.

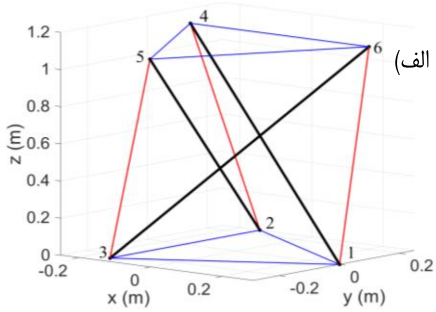
شبیه‌سازی‌های کامپیوتری

تحلیل‌ها در این مقاله به دو بخش فرم‌یابی و تحلیل ارتعاشات آزاد منشور تنسگریتی سه میله‌ای تقسیم‌بندی شده‌اند. با توجه به متساوی‌الاضلاع درنظر گرفتن مقطع پایینی و بالایی منشور، محور **z** از مرکز هر دو صفحات عبور می‌کند. به این ترتیب مختصات تمام گره‌های صفحات بالایی و پایینی از محور **z** یکسان هستند (گره‌ها بر روی دایره‌ای به شعاع r قرار گرفته است). زاویه وضعیت دوران وجوه بالایی و پایینی نسبت به‌هم برای برقراری تعادل $\alpha=\left(3k-1\right)/6$ با فرض $k=2,4,6,...$ برای منشور دوازده عضوی ($\bar{n}=12$) در نظر گرفته شده است.

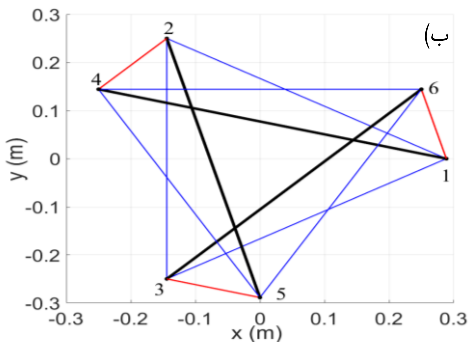
جدول ۱. مختصات گره‌ای

Nodes	۱	۲	۳
x	۰/۲۸۸	-۰/۱۴۴	-۰/۱۴۴
y	۰	۰/۲۵	-۰/۲۵
z	۰	۰	۰
	۴	۵	۶
x	-۰/۲۵	۰	۰/۲۵
y	۰/۱۴۴	-۰/۲۸۸	۰/۱۴۴
z	۱/۱۱۸	۱/۱۱۸	۱/۱۱۸

به‌این‌ترتیب برای محاسبه مختصات گره‌ها با فرض $L_{c1}=0.5(m)$ ثابت برای کابل‌های وجوه بالایی و پایینی، $L_b=1.25(m)$، مقدار $k=2$ در تعیین زاویه دوران، $r=0.2887(m)$، $L_{c2}=1.1286(m)$ و $H=1.1187(m)$ استخراج می‌شود. به‌این‌ترتیب مختصات x-y-z تمام ۶ گره مطابق با جدول (۱) محاسبه می‌شوند که در قالب شکل (۳) نمایش داده شده است.



شکل ۳. پیکربندی حاصل از فرم‌یابی در سازه سه میله‌ای تنسگریتی، (الف) نمای سه‌بعدی و (ب) نمای بالا

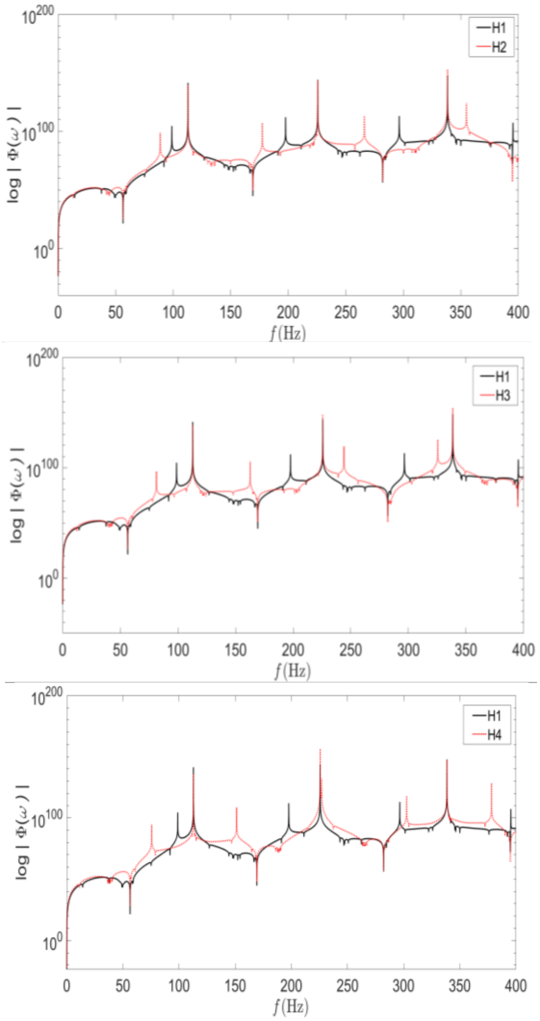


ادامه شکل ۳. پیکربندی حاصل از فرم‌یابی در سازه سه میله‌ای تنسگریتی، (الف) نمای سه‌بعدی و (ب) نمای بالا

با توجه به مختصات محاسبه شده برای گره‌ها، می‌توان ضریب کشش تمام المان‌های این منشور تنسگریتی را با استفاده از روش چگالی نیرو و معادله (۵) برای $\mathbf{q}^i_{b,c_1,c_2}$ محاسبه کرد. با فرض ضریب کشش واحد برای کابل‌های صفحات فوقانی و تحتانی $\mathbf{q}^i_{c_1}=1$، می‌توان ضرایب کشش در میله‌ها و کابل‌های اتصال صفحات فوقانی و تحتانی را بدون متاثر ساختن شرایط خود-پایداری منشور، مقیاس کرد.

با توجه به مختصات گره‌ها، رنک ماتریس $\tilde{\mathbf{E}}$ ($R(\tilde{\mathbf{E}})=11$)، ۱۱ می‌باشد که کمینه رنک مورد نیاز برای برقراری شرط $R(\tilde{\mathbf{E}})<\bar{n}$ را دارا می‌باشد. همچنین، یکی از مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{\Gamma}$ ($\lambda_1=5.9018$) مقدار مثبت و مابقی صفر هستند، که نشان‌دهنده شرایط خودتنشی سیستم می‌باشد. باید به این نکته توجه داشت که اگر سفتی خمشی یک المان پیش‌تنیده محوری قابل صرف‌نظر کردن باشد، این المان را می‌توان با مدل ریسمان مدل‌سازی کرد.

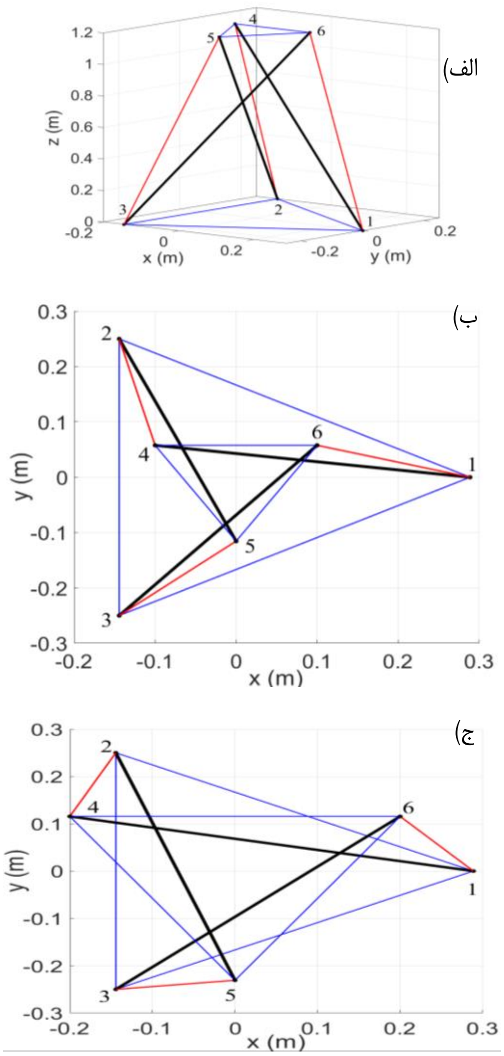
با فرض $\rho A=0.0314(kg/m)$ و پیش‌تنیدگی $\bar{P}_x=800\left(\mathbf{q}^i_{b,L_{c1},L_{c2}}.\mathbf{x}^i_{b,L_{c1},L_{c2}}\right)(N)$، پاسخ دینامیکی سیستم در قالب فرکانس‌های طبیعی و معیاری از دامنه شکل مودها برای ارتفاع‌های مختلف $H_i=[1.1187,1.3925,1.6588,1.9207](m)$ بازاء $L_b=[1.25,1.50,1.75,2.00](m)$ در شکل‌های (۴) و در جدول (۲) برای پنج فرکانس اول نمایش داده شده است. قابل ذکر است یکی از اهداف بررسی افزایش ارتفاع سیستم، بهینه‌سازی‌های جرمی در کاهش تعداد طبقات در کاربردهای با منظور بازشوندگی می‌باشد.



شکل ۴. پاسخ دینامیکی حوزه فرکانس بازاء مقادیر مختلف ارتفاع منشور

جدول ۲. فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر مختلف ارتفاع

H./Freq.(Hz)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
H_1	۹۸/۸۴	۱۱۲/۸	۱۹۷/۷	۲۲۵/۷	۲۹۶/۵
H_2	۸۸/۷۴	۱۱۲/۸	۱۷۷/۵	۲۲۵/۷	۲۶۶/۲
H_3	۸۱/۳۷	۱۱۲/۸	۱۶۲/۷	۲۲۵/۷	۲۴۴/۱
H_4	۷۵/۶۶/	۱۱۲/۸	۱۵۱/۳	۲۲۵/۷	۲۲۷
FEM (H_1)	۱۰۵/۱۶	۱۲۰/۲۹	۲۱۱/۰۴	۲۴۱/۴۲	۳۱۵/۱۵
FEM (H_4)	۸۸/۳۸	۱۳۱/۶۳	۱۷۳/۵	۲۵۶/۲۷	۲۶۱/۴



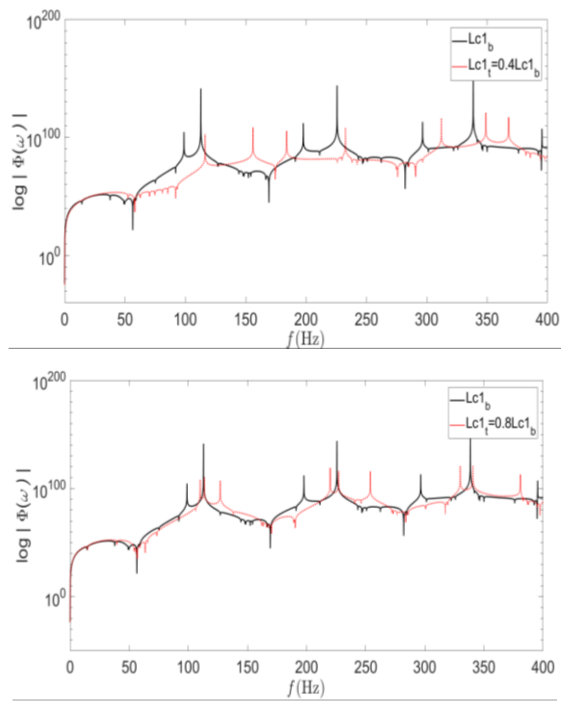
شکل ۵. پیکربندی سه‌بعدی و نمای از بالای حاصل از فرم‌یابی در سازه سه میله‌ای تنسگریتی برای نسبت‌های سطح فوقانی به تحتانی مختلف، (الف) نمای سه‌بعدی ب) $L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=0.4$، (ج) $L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=0.8$

همانطور که می‌توان مشاهده کرد با افزایش ارتفاع سازه، فرکانس‌های طبیعی کاهش یافته و متوسط دامنه افزایش یافته است، خصوصا برای حالتی که طول میله‌های سیستم ۶۰ درصد افزایش یافته است. همچنین نتایج برای ارتفاع‌های H_1 و H_4 جهت ارزیابی حساسیت تحلیل‌ها به تغییر ارتفاع با روش المان محدود مقایسه شده است. تفاوت در نتایج حاصل از روش المان محدود (با یک المان مبین یک جزء از ساختار) با روش المان طیفی (جمله اول) در فرکانس‌های بالاتر بارزتر و با افزایش ارتفاع افزایش می‌یابد که از جمله نقاط ضعف روش المان محدود به‌شمار می‌رود. باید به این نکته توجه داشت که این اختلاف در استفاده از روش المان محدود، به واسطه محدود شدن المان‌بندی ساختار به ابعاد اجزاء در هر طبقه (شامل ریسمان‌ها و میله‌ها) می‌باشد.

جدول ۳. فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر نسبت‌های مختلف L_{c1_T}/L_{c1_B}

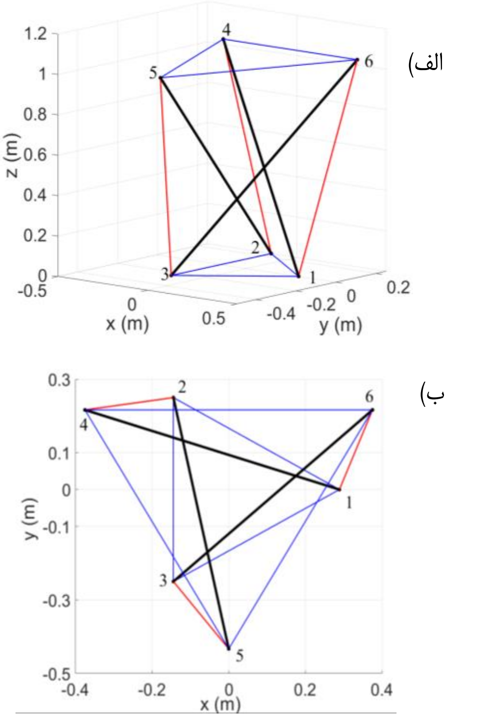
Area R. /Freq. (Hz)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=0.4$	۹۸/۸۴	۱۱۲/۸	۱۹۷/۷	۲۲۵/۷	۲۹۶/۵
$L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=0.8$	۱۱۴/۹	۱۲۷/۲	۱۴۸/۸	۲۲۹/۹	۲۵۴/۴
$L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=1.5$	۸۱/۰۶	۸۹/۸۲	۱۰۹/۹	۱۶۲/۱	۱۷۹/۶
FEM ($L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=1.5$)	۸۶/۷۳	۹۷/۱۹	۱۲۱/۳	۱۷۸/۳	۲۰۳/۱۴

باید به این نکته اشاره داشت، که میزان کاهش فرکانس را می‌توان با افزایش مقدار پیش‌تنیدگی تا حد قابل قبولی جبران کرد که البته افزایش میزان پیش‌تنیدگی به معنی افزایش مصرف انرژی برای سیستم‌های فعال می‌باشد.



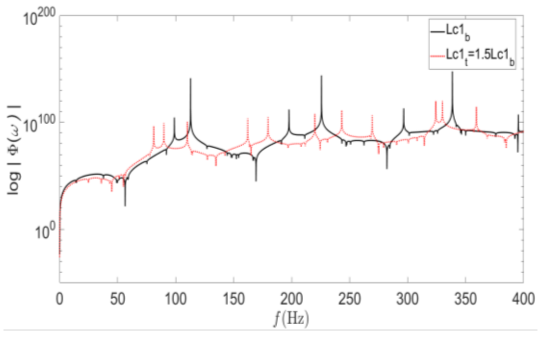
شکل ۶. پاسخ دینامیکی حوزه فرکانس بازاء تغییرات نسبت صفحه فوقانی به صفحه پایه L_{c1_t}/L_{c1_b}

یکی دیگر از تحلیل‌های صورت گرفته، فرم‌یابی مبتنی‌بر تغییر ابعاد صفحه فوقانی با هدف افزایش ضریب چگالی نیرو، کاهش وزن سیستم و افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد. پس از تحلیل‌های مربوط به تعیین پیکربندی و تعیین مختصات گره‌های بالا و پایین سیستم (شکل (۵))، تحلیل‌های مودال در استخراج فرکانس‌های طبیعی سیستم صورت پذیرفته است که نتایج آن در شکل‌های (۶) و جدول (۳) قابل مشاهده است.



شکل ۷. پیکربندی سه بعدی و نمای از بالای حاصل از فرم‌یابی در سازه سه میله‌ای تنسگریتی برای $L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=1.5$

همانطور که می‌توان دریافت، با کاهش نسبت سطح، میزان اثر چگالی نیرو در کابل‌های L_{c2} قابل ملاحظه است، که این باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی و کاهش دامنه شکل مودها خواهد شد. از طرف دیگر نتایج حاصل از فرم‌یابی و تحلیل‌های مودال برای نسبت $L_{c1\_T}/L_{c1\_B}=1.5$ به‌ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) و بند آخر جدول (۳) نمایش داده شده و با نتایج حاصل از روش المان محدود مقایسه شده است.



شکل ۸. پاسخ دینامیکی حوزه فرکانس بازاء تغییرات نسبت صفحه فوقانی به صفحه پایه $L_{c1\_t}/L_{c1\_b}=1.5$

با توجه به فرم پیشنهادی، به‌رغم حفظ مشخصه‌های پایداری سیستم، مقدار چگالی نیرو از حالتی‌که نسبت سطوح فوقانی و تحتانی با یکدیگر برابر هستند نیز کاهش یافته است، که این باعث کاهش ضریب پیش‌تنیدگی و کاهش فرکانس‌های طبیعی سیستم خواهد شد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله فرم‌یابی و تحلیل ارتعاشات آزاد یک سیستم نوع اول تنسگریتی سه‌میله‌ای با استفاده از روش المان طیفی صورت پذیرفت. فرم‌یابی این سیستم با قید تامین الزامات رنک ماتریس تعادل و چگالی نیرو مبتنی بر تغییر ارتفاع سیستم و نسبت سطح صفحه فوقانی به صفحه پایینی انجام شد. همزمان با تعیین فرم، مختصات گره‌ای و چگالی نیرو تعیین شده است. برای استخراج بازه مناسب (امکان‌پذیر) برای مختصات گره‌ای، از تجزیه مقادیر ویژه ماتریس چگالی نیرو و تجزیه مقدار تکین ماتریس تعادلی استفاده شد تا الزامات رنک این ماتریس‌ها ارضاء شود. همچنین استفاده از توابع شکلی دینامیکی که وابسته به فرکانس‌های ارتعاشی و طول موج می‌باشد می‌تواند پاسخ‌های دینامیکی دقیق‌تری را نسبت به سایر روش‌های مستقل از فرکانس مانند روش المان محدود ارائه دهد. مشاهده شد که کاهش ارتفاع و کاهش نسبت سطح فوقانی به تحتانی می‌تواند در کاهش فرکانس‌های سیستم موثر باشد. البته باید به این نکته توجه داشت که افزایش طول را می‌توان با افزایش تعداد طبقات (در سیستم‌های باز شونده) با ملاحظات وزنی پوشش داد و قوام سیستم را حفظ کرد. الگوریتم پیشنهادی نه تنها بستر مناسبی برای استفاده از تکنیک‌های عددی در تعیین فرم سازه‌های بزرگ و پیچیده ایجاد می‌کند بلکه تحلیل مودال صورت گرفته با ملاحظات حفظ پایداری سازه (ناشی از فرم‌یابی)، رویکرد مناسبی برای فرم‌یابی دینامیکی سیستم‌های تنسگریتی با پیکربندی‌های پیچیده‌تر با دانش محدود از توپولوژی و جنس اعضاء سازه‌ای خواهد بود.

تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافعی توسط نویسندگان بیان نشده است.

مراجع

[1] A. Tibert and S. Pellegrino, "Deployable tensegrity reflectors for small satellites," *J. of Spac. and Rockets*, vol. 39, No 5, pp 701-709, 2002.

[2] C. Sultan and R. Skelton, "Deployment of tensegrity structures," *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 40, No 18, pp. 4637-4657, 2003.

[3] C. Russell and G. Tibert, "Deployment simulations of inflatable tensegrity structures," *Int.J. of space struct.*, vol. 23, No2, pp. 63-77, 2008.

[4] H. Furuya, "Concept of deployable tensegrity structures in space application," *Int. J. of Space Struc.*, vol. 7, No 2, pp. 143-151, 1992.

[5] K. Yildiz and G. A. Lesieutre, "Sizing and prestress optimization of Class-2 tensegrity structures for space boom applications," *Eng. with Comp., Vol 38, No 2*, pp. 1-14, 2020.

[6] R. E. Skelton and M. C. De Oliveira, *Tensegrity systems* vol. 1, New York, Springer, 2009.

[7] A. M. Popescu, R. Goyal, and M. Majji, "Design and Control of a Tensegrity Torus Spacecraft Composed of

extended force density method by grouping elements," *Composite Structures,* vol. 187, pp. 1-9, 2018.

[27] L.-Y. Zhang, S.-X. Zhu, S.-X. Li, and G.-K. Xu, "Analytical form-finding of tensegrities using determinant of force-density matrix," *Composite Structures,* vol. 189, pp. 87-98, 2018.

[28] R. Burkhardt, "The application of nonlinear programming to the design and validation of tensegrity structures with special attention to skew prisms," *J. of the Int. Association for Shell and Spatial Struct.,* vol. 47, No 1, pp. 3-15, 2006.

[29] H. C. Tran and J. Lee, "Advanced form-finding of tensegrity structures," *Computers & structures,* vol. 88, No 3-4, pp. 237-246, 2010.

[30] G. G. Estrada, H.-J. Bungartz, and C. Mohrdieck, "Numerical form-finding of tensegrity structures," *Int. J. of Solids and Struct.,* vol. 43, No 22-23, pp. 6855-6868, 2006.

[31] L. Zhang, Q. Gao, Y. Liu, and H. Zhang, "An efficient finite element formulation for nonlinear analysis of clustered tensegrity," *Eng. Comp* Vol 33, No 1, pp 252-273, 2016.

[32] M. Pagitz and J. M. Tur, "Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures," *Int. J. of Solids and Stru.,* vol. 46, No 17, pp. 3235-3240, 2009.

[33] S. Yang and C. Sultan, "Free vibration and modal analysis of a tensegrity-membrane system," in *ASME 2016 Int. Des. Eng. Tech. Conf. and Com. and Inf. in Eng. Conf., Volume 6: 12th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control*. Charlotte, North Carolina, USA. August 21–24, 2016. V006T09A023. ASME. https://doi.org/ 10.1115/ DETC2016-59292

[34] Z. Kan, H. Peng, B. Chen, and W. Zhong, "Nonlinear dynamic and deployment analysis of clustered tensegrity structures using a positional formulation FEM," *Composite Structures,* vol. 187, pp. 241-258, 2018.

[35] X. Liu and J. Banerjee, "Free vibration analysis for plates with arbitrary boundary conditions using a novel spectral-dynamic stiffness method," *Com. & Stru.,* vol. 164, pp. 108-126, 2016.

[36] N. Ashwear and A. Eriksson, "Vibration health monitoring for tensegrity structures," *Mech. Sys. and Signal Proc.,* vol. 85, pp. 625-637, 2017.

[37] S. Zhang, R. Shen, T. Wang, G. De Roeck, and G. Lombaert, "A two-step FEM-SEM approach for wave propagation analysis in cable structures," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 415, pp. 41-58, 2018.

[38] H. Sharma, S. Mukherjee, and R. Ganguli, "Stochastic strain and stress computation of a higher-order sandwich beam using hybrid stochastic time domain spectral element method," *Mech. of Adv. Mat. and Struc.,*Vol 29, No 4, pp. 1-14, 2020.

[39] J. M. Thompson, "A general theory for the equilibrium and stability of discrete conservative systems," *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP,* vol. 20, pp. 797-846, 1969.

[40] H. Murakami and Y. Nishimura, "Initial shape finding and modal analyses of cyclic right-cylindrical tensegrity modules," *Comp. & Struc.,* vol. 79, issue 9, pp. 891-917, 2001.

Reconfigurable Units," in *AIAA Scitech 2021 Forum,* p. 1387, 2021.

[8] X. Li, W. Kong, and J. He, "A task-space form-finding algorithm for tensegrity robots," *IEEE Access,* vol. 8, pp. 100578-100585, 2020.

[9] R. Goyal, M. Majji, and R. E. Skelton, "Integrating structure, information architecture and control design: Application to tensegrity systems," *Mech. Sys. and Signal Proc.,* vol. 161, p. 107913, 2021.

[10] L. Wen, F. Pan, and X. Ding, "Tensegrity metamaterials for soft robotics," *Sci. Robot.,* vol. 5, No 45, p. eabd9158, 2020.

[11] Y .Lu, X. Xu, and Y. Luo, "Path planning for rolling locomotion of polyhedral tensegrity robots based on dijkstra algorithm," *J. of the Int. Association for Shell and Spatial Struc.,* vol. 60, No 4, pp. 273-286, 2019.

[12] N. B. Kahla, M. H. E. Ouni, N. B. H. Ali, and R. A. Khan, "Nonlinear Dynamic Response and Stability Analysis of a Tensegrity Bridge to Selected Cable Rupture," *Latin American J. of Solids and Struc.,* vol. 17, 2020.

[13] D. E. Ingber, N. Wang, and D. Stamenović, "Tensegrity, cellular biophysics, and the mechanics of living systems," *Reports on Progress in Physics,* vol. 77, No4, p. 046603, 2014.

[14] W. J. Lewis, *Tension structures: form and behaviour*: Thomas Telford, 2003.

[15] Y. Wang and X. Xu, "Prestress design of tensegrity structures using semidefinite programming," *Adv. in Civil Eng.,* vol. 2019, 2019.

[16] X. Xu, Y. Wang, Y. Luo, and D. Hu, "Topology optimization of tensegrity structures considering buckling constraints," *Journal of Structural Engineering,* vol. 144, No 10, p. 04018173, 2018.

[17] Y. Wang, X. Xu, and Y. Luo, "Topology design of general tensegrity with rigid bodies," *Int. J. of Solids and Struc.,* vol. 202, pp. 278-298, 2020.

[18] A. Pugh, *An introduction to tensegrity*: University of California Press, 1976.

[19] A. Tibert and S. Pellegrino, "Review of form-finding methods for tensegrity structures," *Int. J. of Space Struc.,* vol. 18, No 4, pp. 209-223, 2003.

[20] S. H. Juan and J. M. M. Tur, "Tensegrity frameworks: Static analysis review," *Mechanism and Machine Theory,* vol. 43, No 7, pp. 859-881, 2008.

[21] N. Vassart and R. Motro, "Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems," *Int. J. of space struc.,* vol. 14, No 2, pp. 147-154, 1999.

[22] K. Koohestani, "On the analytical form-finding of tensegrities," *Composite Structures,* vol. 166, pp. 114-119, 2017.

[23] X. Xu, Y. Wang, and Y. Luo, "Finding member connectivities and nodal positions of tensegrity structures based on force density method and mixed integer nonlinear programming," *Eng. Structures,* vol. 166, pp. 240-250, 2018.

[24] N. B. H. Ali, L. Rhode-Barbarigos, and I. F. Smith, "Analysis of clustered tensegrity structures using a modified dynamic relaxation algorithm," *Int. J. of Solids and Stru.,* vol. 48, No 5, pp. 637-647, 2011.

[25] Y. Chen, Q. Sun, and J. Feng, "Improved form-finding of tensegrity structures using blocks of symmetry-adapted force density matrix," *J. of Struc. Eng.g,* vol. 144, No 10, p. 04018174, 2018.

[26] J. Cai, X. Wang, X. Deng, and J. Feng, "Form-finding method for multi-mode tensegrity structures using