

آنالیز استاتیکی مدولاتور پهنا و فرکانس پالس مبتنی بر حل تحلیلی و عددی

سید حمید جلالی نائینی^۱

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

*تهران، کد پستی: ۱۴۱۱۷-۱۳۱۱۶

shjalalinaini@modares. ac. ir

در این تحقیق، محدوده مجاز پارامترهای مدولاتور پهنا و فرکانس پالس در آنالیز استاتیکی به صورت تحلیلی استخراج شده است. بدین منظور، مطالعه پارامتری جامعی بر مبنای دو معیار عملکرد مصرف سوخت و تعداد دفعات روشن شدن عملگر تراستر صورت پذیرفته و محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد با روابط ریاضی و به صورت نمودارهای بی‌بعد ارائه شده است. همچنین، روابط تحلیلی دقیق محاسبه دو معیار عملکرد مصرف سوخت و تعداد دفعات روشن شدن عملگر تراستر برای یک کلاس از مدولاتورها با فرض ورودی ثابت بدست آمده است. مزیت تحلیل حاضر، علاوه بر بی‌بعد بودن پارامترها، استخراج محدوده پارامترها بر حسب یکدیگر است. این کار، محدوده پارامترها را به صورت دقیق‌تر از روش تعیین محدوده هر پارامتر با نامساوی نتیجه می‌دهد. همچنین، در صورت مشخص بودن مقدار حداقل عرض پالس (با فرکانس کاری مدولاتور و ثابت زمانی دینامیک تراستر)، انتخاب محدوده پارامترها محدودتر خواهد شد که در این خصوص نمودارها و روابط مفیدی بر مبنای حداکثر ممکن تعداد دفعات روشن شدن تراستر ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل وضعیت ماهواره، عملگرهای دو وضعیتی، مدولاتور پهنا و فرکانس پالس، مدولاتور نرخ کاذب، آنالیز استاتیکی

| | |
|----------------|----------------------------------|
| U_{on} | آستانه روشن شدن بلوک اشمیت‌تریگر |
| U_m | گشتاور اشباع بلوک اشمیت‌تریگر |
| Y | خروجی مدولاتور |
| Δ | حداقل عرض پالس |
| ΔV | مصرف سوخت |
| δv | مصرف سوخت بی‌بعد |
| θ_{ref} | زاویه ورودی مرجع |
| τ | ثابت زمانی فیلتر |

مقدمه

مدولاتور پهنا و فرکانس پالس در کنترل وضعیت و مدار ماهواره‌ها و فضاپیماها با عملگرهای تراستر دو وضعیتی (روشن-خاموش) کاربرد دارد. این مدولاتور یک المان غیرخطی است. برای طراحی کنترل

علائم و اختصارات

| | |
|-----------|-----------------------------------|
| E | ورودی مدولاتور |
| h | مقدار پسماند بی‌بعد |
| I_n | ورودی ثابت |
| K | بهره فیلتر مدولاتور |
| K_{pre} | پیش بهره مدولاتور |
| N | تعداد دفعات روشن شدن مدولاتور |
| t_f | زمان نهایی |
| t_{off} | مدت زمان خاموش بودن مدولاتور |
| t_{on} | مدت زمان روشن شدن مدولاتور |
| U_{off} | آستانه خاموش شدن بلوک اشمیت‌تریگر |

دفعات روشن شدن تراستر بدست آمده است. اما در اغلب آنها محدوده‌ها به ازای هر یک از معیارهای عملکرد، جداگانه ارائه نشده است و بعضاً نیز به شیوه انتخاب خود اشاره کرده‌اند. به طور نمونه، شیوه تعیین این محدوده‌ها نیز به این صورت بیان شده است که به ازای مقادیر مختلف پارامترهای مدولاتور، دو معیار عملکرد مذکور را محاسبه (و ترسیم) می‌کنند. سپس با حذف محدوده‌هایی که منجر به مقادیر بالا برای این دو معیار عملکرد می‌شود، محدوده‌های ترجیحی تعیین می‌شود. به طور مثال، محدوده‌ها را می‌توان براساس حذف ۲۰ تا ۳۰ درصد مقادیر بالا برای دو معیار عملکرد تعیین نمود. هرچه مقادیر بزرگتر معیارهای عملکرد حذف شود، محدوده پارامترها کوچکتر می‌شود. متأسفانه مقدار مذکور در مراجع [۱۷-۱۹] گزارش نشده است، اما مرجع [۱۹، ۲۰] براساس معیار ۳۰ درصد عمل کرده است. نکته منفی مطالعات موجود، مشخص نبودن تأثیر انحراف کوچک از محدوده‌ها بر مقادیر معیارهای عملکرد است. در صورتی که اگر محدوده‌ها به ازای درصدهای متفاوت حذف نمایش داده شود، این مشکل برطرف می‌شود. شایان ذکر است که پارامترهای مدولاتور پهنا و فرکانس پالس در مراجع [۲۱-۲۴] برای طراحی کنترل وضعیت ماهواره از محدوده‌های ترجیحی مرجع [۱۷] استفاده کرده‌اند. همچنین همان‌طور که ذکر شد، انتخاب مقدار ورودی مدولاتور برابر نصف مقدار اشباع در استخراج محدوده پارامترها در تحلیل استاتیکی، تحلیل جامعی نمی‌دهد. در صورتی که تحلیل استاتیکی به ازای مقادیر دیگر ورودی نیز انجام شود، تحلیل کامل‌تر و مطمئن‌تری را نتیجه می‌دهد.

در مطالعه حاضر، محدوده ترجیحی پارامترهای گروه‌بندی شده مدولاتور پهنا و فرکانس پالس براساس حل تحلیلی و عددی و دو معیار عملکرد مصرف سوخت و تعداد دفعات روشن شدن تراستر به ازای مقادیر مختلف ورودی استخراج شده است. بدین منظور، نمودارهای بی‌بعد و روابط تحلیلی متعددی نیز ارائه شده است. در نهایت، روابط پارامتری مفیدی برای محدوده‌ها بیان شده است.

مدولاتور پهنا و فرکانس پالس

مدولاتور پهنا و فرکانس پالس یک المان غیرخطی است و مطابق شکل (۱) الف از یک فیلتر مرتبه اول، بلوک اشمیت‌تریگر و فیدبک واحد تشکیل شده است. در این شکل، E ورودی مدولاتور، Y خروجی مدولاتور، U_{on} آستانه روشن شدن بلوک اشمیت‌تریگر، U_{off} آستانه خاموش شدن، U_m گشتاور اشباع بلوک مذکور، K بهره فیلتر، τ ثابت زمانی فیلتر و K_{pre} پیش‌بهره مدولاتور است.

وضعیت ماهواره با مدولاتور پهنا و فرکانس پالس باید تحلیل استاتیکی، دینامیکی و سیستمی صورت پذیرد [۱-۳]. در مراجع، مدولاتورهای متعددی معرفی شده است. از جمله این مدولاتورها، مدولاتور پهنا و فرکانس پالس، مدولاتور پهنا و مدولاتور نرخ کاذب هستند. ویژگی‌های مدولاتورهای مذکور در مراجع مختلف اشاره و مقایسه شده است [۴-۷]. مدولاتور پهنا و فرکانس پالس در کنترل وضعیت زاویه‌ای ماهواره [۸، ۹]، مستهلک‌سازی سرعت زاویه‌ای ماهواره پس از جدایش از ماهواره بر [۱۰]، حفظ و تصحیح موقعیت مداری [۱۱]، کنترل مازول زیرمداری [۱۲] و ملاقات مداری فضاییما [۱۳] استفاده شده است. همچنین، در دیگر وسایل فضایی مانند رهگیری اهداف فضایی نیز کاربرد دارد [۱۴]. شایان ذکر است که به منظور بهبود عملکرد کنترل وضعیت ماهواره، مدولاتور پهنا و فرکانس پالس با کنترلگرهای دیگر نیز ترکیب شده است. به طور نمونه، در این خصوص می‌توان از مراجع [۱۵، ۱۶] نام برد.

همان‌طور که اشاره شد، در طراحی کنترل وضعیت ماهواره با مدولاتور پهنا و فرکانس پالس باید تحلیل استاتیکی، دینامیکی، پایدارسازی و سیستمی صورت پذیرد. در اکثر منابع منتشرشده، به طور نمونه در مراجع [۱۷-۱۹]، به ازای یک مقدار معین برای ممان اینرسی ماهواره و سطح گشتاور حاصل از تراستر، محدوده پارامترها استخراج شده است. به عبارت دیگر، با تغییر گشتاور حاصل از تراستر یا ممان اینرسی ماهواره، محدوده‌های بدست آمده در این منابع قابل استفاده نیست. ایراد دیگر این مطالعات، بیان جداگانه محدوده‌های ترجیحی پارامترهاست، در صورتی که این محدوده‌ها به یکدیگر مرتبط است. به طور مثال، پارامتر مقادیر آستانه روشن یا خاموش شدن تراستر تقسیم بر مقدار بهره فیلتر تعیین‌کننده است و نه مقدار هر کدام از این پارامترها. البته در مرجع [۲۰] محدوده‌های (شبه) بی‌بعد برای تحلیل استاتیکی، دینامیکی و سیستمی بدست آمده است که تاحدودی معایب مذکور را مرتفع می‌کند. اما نتایج حاصل محدودیت‌هایی دارد که در ادامه در چارچوب محدوده تحلیل استاتیکی به آن اشاره می‌شود.

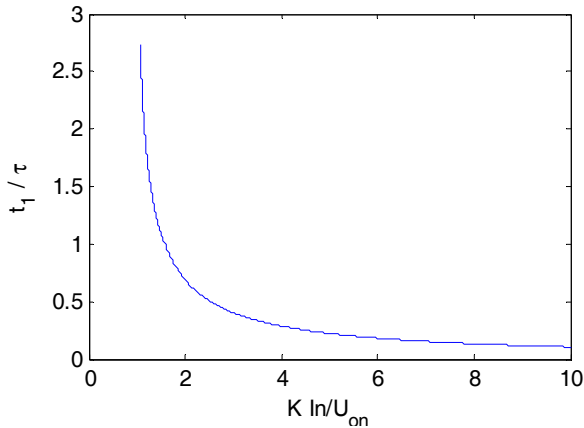
در تحلیل استاتیکی و دینامیکی، عملکرد مدولاتور (خارج از مدار کنترل وضعیت) بررسی شده و محدوده ترجیحی پارامترهای مدولاتور استخراج می‌شود. به عبارت دیگر، در تحلیل استاتیکی نیازی به ممان اینرسی ماهواره نیست. در منابع به منظور تحلیل استاتیکی، به طور مثال در مرجع [۱۹]، ورودی مدولاتور نصف گشتاور خروجی لحاظ شده است. در صورتی که اگر یک انتخاب موجود باشد، احتمالاً این مقدار ورودی بهترین است اما تحلیل جامعی نتیجه نمی‌دهد. در منابع، محدوده‌های ترجیحی پارامترهای مدولاتور با استفاده از دو معیار عملکرد مصرف سوخت و تعداد

$$\ln > U_{on}/K \quad (۱)$$

البته به ازای حالت تساوی در نامساوی فوق، مدولاتور در زمان بی‌نهایت روشن می‌شود. تأخیر زمانی خالص در روشن شدن مدولاتور از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۲]:

$$t_1 = -\tau \ln \left(1 - \frac{U_{on}}{K \ln} \right) \quad (۲)$$

رابطه اخیر در شکل (۲) به صورت بی‌بعد ترسیم شده است. مطابق جدول (۱)، اگر ورودی تنها مقدار ناچیزی از مقدار U_{on}/K بزرگتر باشد، تأخیر زمانی فعال شدن مدولاتور مقدار بزرگی می‌شود.



شکل ۲- نمایش بی‌بعد تأخیر زمانی روشن شدن مدولاتور بر حسب نسبت حاصل ضرب بهره در مقدار ورودی به آستانه روشن شدن

جدول ۱- نمایش مقادیر عددی تأخیر زمانی بی‌بعد اولیه مدولاتور

| t_1/τ | $K \ln/U_{on}$ | t_1/τ | $K \ln/U_{on}$ |
|------------|----------------|------------|----------------|
| $+\infty$ | ۱ | ۱٫۴۶ | ۱٫۳ |
| ۶٫۹۱ | ۱٫۰۰۱ | ۱٫۲۵ | ۱٫۴ |
| ۴٫۶۱ | ۱٫۰۱ | ۱٫۰۹ | ۱٫۵ |
| ۲٫۳۹ | ۱٫۱ | ۰٫۹۸ | ۱٫۶ |
| ۱٫۷۹ | ۱٫۲ | ۰٫۶۹ | ۲ |

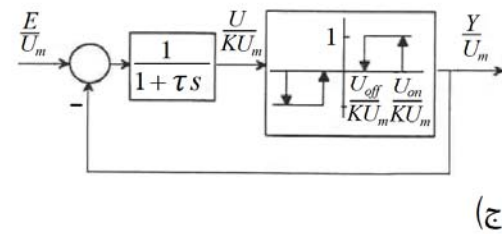
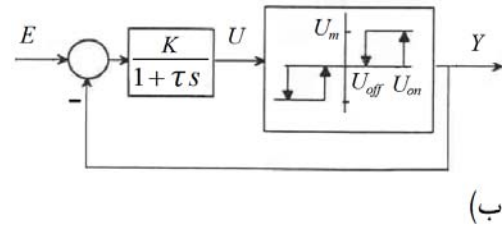
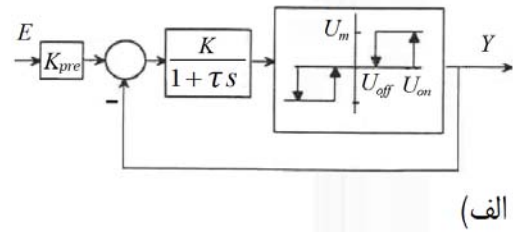
اگر مدار کنترل وضعیت ماهواره شامل مدولاتور پهنا و فرکانس پالس با کنترلگر P-D باشد، در لحظه اولیه با فرض ماهواره در حالت ایستا با زاویه اولیه صفر، رابطه $\ln = K_P \theta_{ref}$ برقرار است که در آن K_P ضریب بهره تناسبی است. شرط فعال شدن مدولاتور در وضعیت مذکور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_{on} < K K_P \theta_{ref} \quad (۳)$$

البته با احتساب تأخیر زمانی مجاز، رابطه فوق باید از جدول (۱) تصحیح شود. به طور نمونه به ازای $t_1 < 2.4\tau$ می‌توان نوشت:

$$U_{on} < (K K_P / 1.1) \theta_{ref} \quad (۴)$$

البته مقادیر فوق با توجه به تحلیل سیستمی تعیین می‌شود. به علاوه در طراحی، معیارهای دیگری نیز با توجه به دقت نشانه‌رویی



شکل ۱- مدولاتور پهنا و فرکانس پالس، (الف) با پیش بهره، (ب) بدون پیش بهره، (ج) نمایش شبه بی‌بعد (بدون پیش بهره)

در شکل (۱ ب)، پیش بهره حذف شده است؛ چراکه به طور نمونه می‌تواند در بهره‌های مدار کنترلی P-D ادغام شود. لذا در این تحقیق، بلوک پیش بهره حذف شده است. در شکل (۱ ج) بلوک دیگرام شبه بی‌بعد مدولاتور پهنا و فرکانس پالس (بدون پیش بهره) ترسیم شده است. شایان ذکر است که تقریب این مدولاتور (بدون پیش بهره) مقدار واحد است. به عبارت دقیق‌تر، نسبت متوسط خروجی به مقدار ورودی به جز در ناحیه اشباع و ورودی‌های کوچک، تقریباً یک می‌شود.

در تحلیل استاتیکی و دینامیکی، تنها عملکرد مدولاتور (خارج از مدار کنترل وضعیت) بررسی شده و محدوده مقادیر مجاز (ترجیحی) پارامترهای آن استخراج می‌شود. در تحلیل استاتیکی، مقدار ورودی ثابت اعمال می‌شود. در تحلیل دینامیکی، سیگنال ورودی به صورت هارمونیک (سینوسی) در نظر گرفته می‌شود.

مطالعه پارامتری مدولاتور پهنا و فرکانس پالس

نخست مطالعه پارامتری مدولاتور پهنا و فرکانس پالس با فرض ورودی ثابت ($E = \ln$) انجام می‌شود. شرط این‌که در مدولاتور پهنا و فرکانس پالس، مدولاتور فعال شود این است که

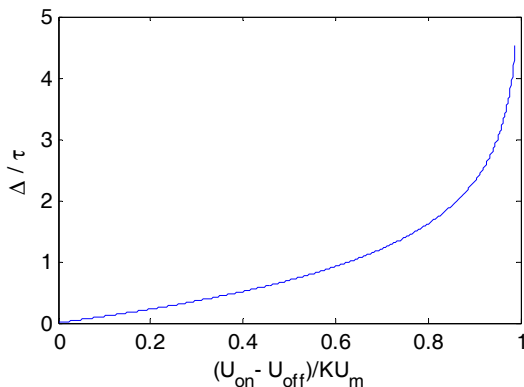
رابطه «حداقل عرض پالس» نیز به صورت زیر نوشته می شود [۳]:

$$\Delta = -\tau \ln(1 - h) \quad (10)$$

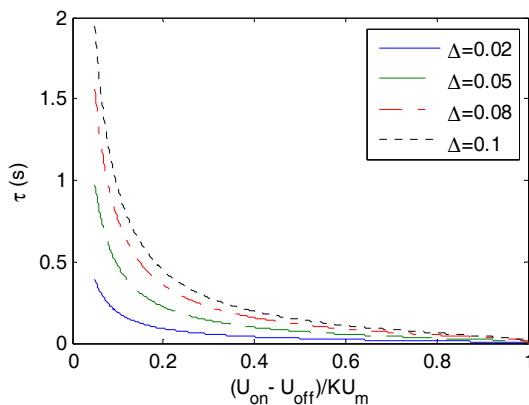
نمایش بی بعد رابطه اخیر در شکل (۵) ملاحظه می شود. اگر مقدار پسماند بی بعد کوچک باشد، می توان از تقریب خطی استفاده کرد:

$$\Delta \approx h\tau \quad (11)$$

«حداقل عرض پالس» در طراحی سیستم کنترل بسیار مهم می باشد. با معلوم فرض کردن مقدار «حداقل عرض پالس»، نمودار مقدار ثابت زمانی فیلتر بر حسب مقدار پسماند بی بعد قابل محاسبه و ترسیم است (شکل ۶).



شکل ۵- نمایش بی بعد نسبت حداقل پهنای پالس به ثابت زمانی فیلتر بر حسب مقدار پسماند بی بعد



شکل ۶- مقدار ثابت زمانی فیلتر بر حسب مقدار پسماند بی بعد به ازای مقادیر مختلف حداقل پهنای پالس

در ادامه، معیار مصرف سوخت (انتگرال زمانی قدر مطلق خروجی مدولاتور) و معیار تعداد دفعات روشن شدن عملگر تراستر محاسبه و ارزیابی می شود. رابطه تقریبی مصرف سوخت به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\Delta V}{U_m t_f} \approx \frac{t_{on}}{t_{on} + t_{off}} \quad (12)$$

که در آن، t_f زمان نهایی است. بنابراین،

و دامنه چرخه حدی و تأخیر فاز اعمالی به مدار کنترلی مد نظر و قابل استخراج است. موارد مذکور خارج از موضوع مطالعه حاضر است زیرا که مرتبط با تحلیل سیستمی هستند.

در ابتدا، پارامترهای مدولاتور به صورت بی بعد نمایش داده می شود:

$$in = \frac{I_n}{U_m}, u_{on} = \frac{U_{on}}{KU_m}, u_{off} = \frac{U_{off}}{KU_m} \quad (5)$$

$$h = \frac{H}{KU_m}, H = U_{on} - U_{off}$$

مدت زمان روشن بودن و خاموش بودن مدولاتور پهنا و فرکانس پالس مطابق مرجع [۲] از روابط زیر بدست می آید:

$$t_{on} = -\tau \ln\left(1 - \frac{h}{1 + u_{on} - in}\right) \quad (6)$$

$$t_{off} = -\tau \ln\left(1 - \frac{h}{h - u_{on} + in}\right) \quad (7)$$

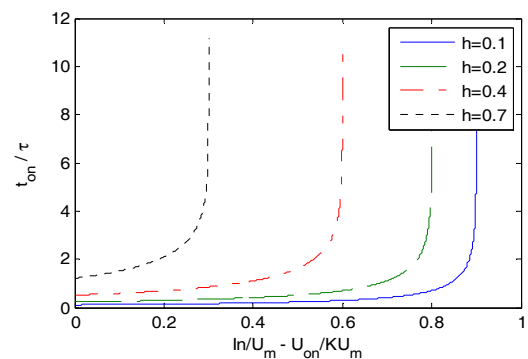
روابط مذکور در شکل های (۳) و (۴) نمایش داده شده است. شرط دوباره خاموش شدن مدولاتور پس از روشن شدن اولیه، به صورت رابطه (۸) می باشد:

$$K(I_n - U_m) < U_{off} \text{ or } in - u_{off} < 1 \quad (8)$$

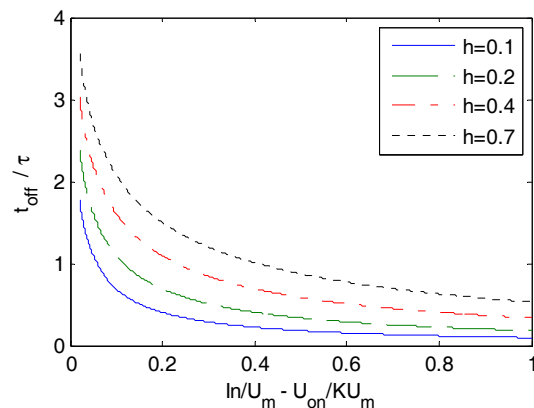
رابطه فوق به صورت زیر هم نمایش داده می شود:

$$in - u_{on} < 1 - h \quad (9)$$

رعایت شرط فوق در شکل (۳) قابل مشاهده است.



شکل ۳- نمایش بی بعد مدت زمان روشن ماندن تراستر (در یک پالس) بر حسب تفاضل ورودی بی بعد و آستانه روشن شدن بی بعد



شکل ۴- نمایش بی بعد مدت زمان خاموش ماندن تراستر (مابین دو پالس) بر حسب تفاضل ورودی بی بعد و آستانه روشن شدن بی بعد

رابطه تقریبی تعداد دفعات روشن شدن تراستر به صورت رابطه (۱۵) نوشته می‌شود:

$$N \approx \frac{t_f}{t_{on} + t_{off}} \quad (15)$$

رابطه اخیر برحسب کمیت‌های بی‌بعد به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$n = \frac{N\tau}{t_f} \approx \frac{1}{\ln\left(1 - \frac{h}{in - u_{on} - 1 + h}\right) + \ln\left(1 + \frac{h}{in - u_{on}}\right)} \quad (16)$$

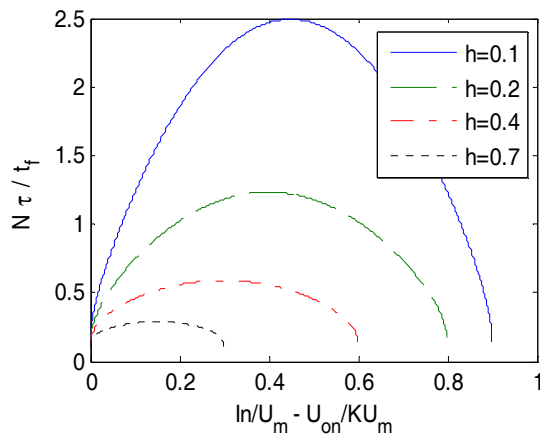
در شکل‌های (۹) و (۱۰) رابطه فوق ترسیم شده است. همان‌گونه که از این شکل‌ها ملاحظه می‌شود، نمودارها به ازای مقدار معینی به مقدار حداکثر خود می‌رسد. مقدار حداکثر نمودارها به ازای

$$in - u_{on} = \frac{1-h}{2} \quad (17)$$

رخ می‌دهد. در حالت مذکور، زمان روشن بودن و خاموش بودن مدولاتور برابر خواهد شد ($t_{on} = t_{off}$). با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۶)، رابطه (۱۸) برای محاسبه حداکثر ممکن تعداد دفعات روشن شدن تراستر حاصل می‌شود که در شکل (۱۱) نیز ترسیم شده است.

$$n_{max} = \max \frac{N\tau}{t_f} \approx \frac{1}{2 \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)} \quad (18)$$

در ادامه، به منظور مطالعه دقیق‌تر، نمودارهای تعداد دفعات روشن شدن تراستر برحسب آستانه خاموش شدن و آستانه روشن شدن مدولاتور به ازای مقادیر مختلف ورودی بی‌بعد، به ترتیب در شکل‌های (۱۲) تا (۱۴) و (۱۵) تا (۱۷) ترسیم شده است.



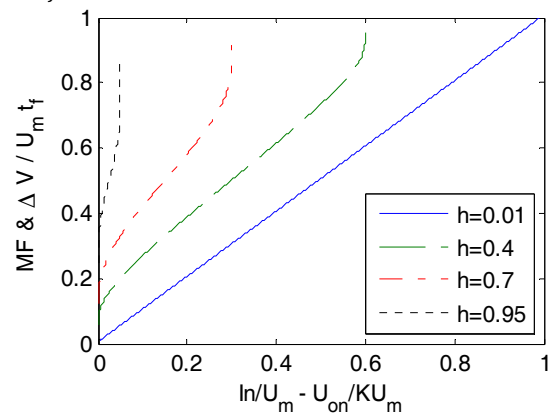
شکل ۹- نمایش بی‌بعد تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب تفاضل ورودی بی‌بعد و آستانه روشن شدن بی‌بعد

$$\frac{\Delta V}{U_m t_f} \approx \frac{\ln\left(1 - \frac{h}{1 + u_{on} - in}\right)}{\ln\left(1 - \frac{h}{1 + u_{on} - in}\right) + \ln\left(1 - \frac{h}{h - u_{on} + in}\right)} \quad (13)$$

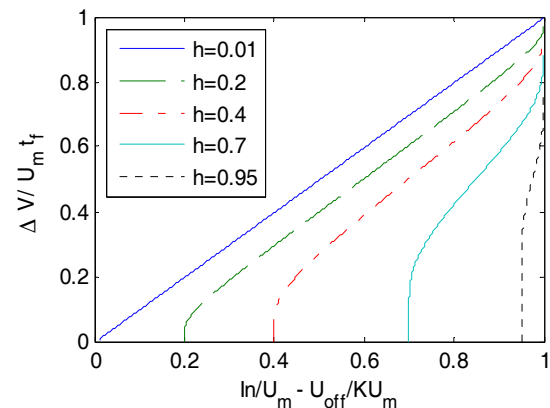
نکته قابل توجه این است که مطابق رابطه تقریبی اخیر، مصرف سوخت تابعی از ثابت زمانی فیلتر نمی‌شود. رابطه (۱۳) در شکل (۷) ترسیم شده است. رابطه (۱۳) را به جای آستانه روشن شدن برحسب آستانه خاموش شدن نیز می‌توان نوشت که نمودار آن در شکل (۸) ترسیم شده است. بدیهی است که اگر مدولاتور از ابتدا تا زمان نهایی روشن باشد، مقدار «مصرف سوخت بی‌بعد» برابر یک می‌شود. نکته دیگر این است که مطابق رابطه (۱۲)، «مصرف سوخت بی‌بعد» برابر ضریب مدولاتور است (MF).

اگر از روابط تقریبی برای زمان روشن بودن و زمان خاموش بودن مدولاتور استفاده شود، رابطه (۱۳) به ازای $in > u_{on}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

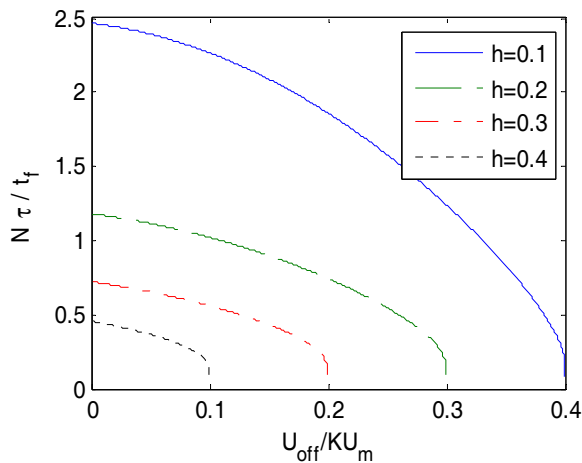
$$\frac{\Delta V}{U_m t_f} \approx \frac{in - u_{on} + h}{1+h} = \frac{in - u_{off}}{1+h} \quad (14)$$



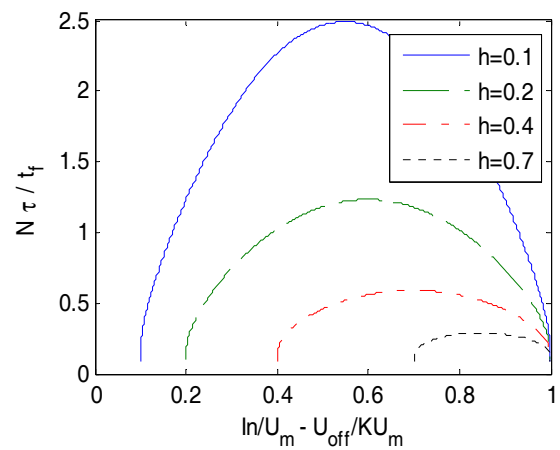
شکل ۷- نمایش ضریب مدولاسیون (و مصرف سوخت بی‌بعد) بر حسب تفاضل ورودی بی‌بعد و آستانه روشن شدن بی‌بعد



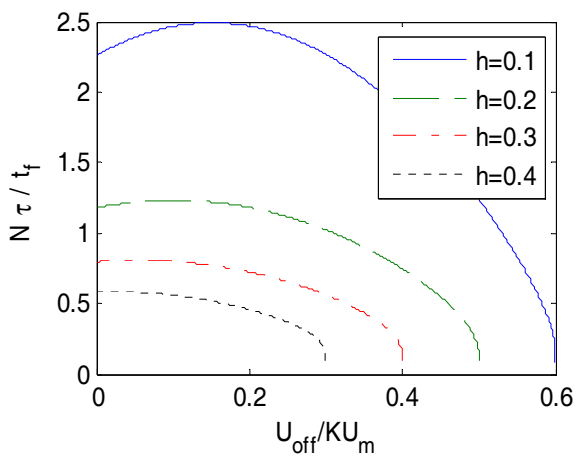
شکل ۸- نمایش ضریب مدولاسیون (و مصرف سوخت بی‌بعد) بر حسب تفاضل ورودی بی‌بعد و آستانه خاموش شدن بی‌بعد



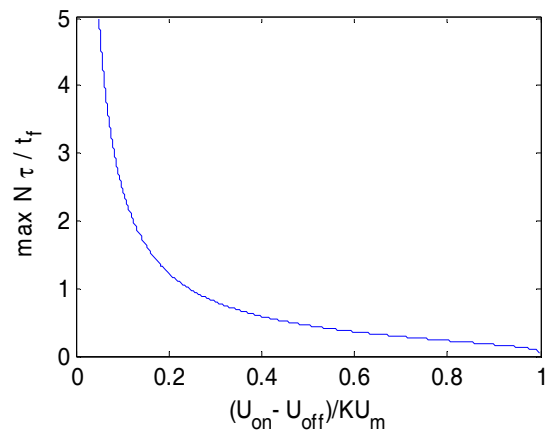
شکل ۱۳- نمایش تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب آستانه خاموش شدن بی بعد به ازای $in = 0.5$



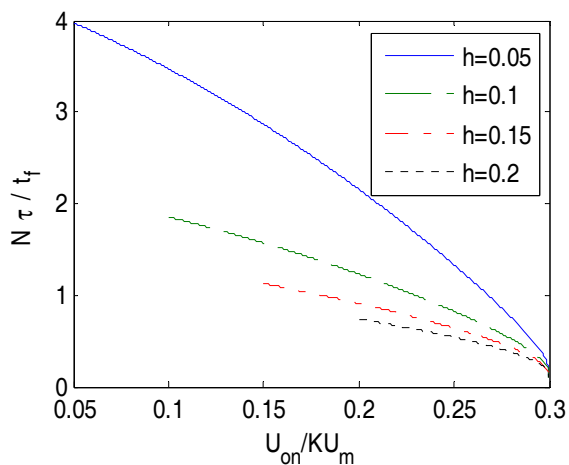
شکل ۱۰- نمایش بی بعد تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب تفاضل ورودی بی بعد و آستانه خاموش شدن بی بعد



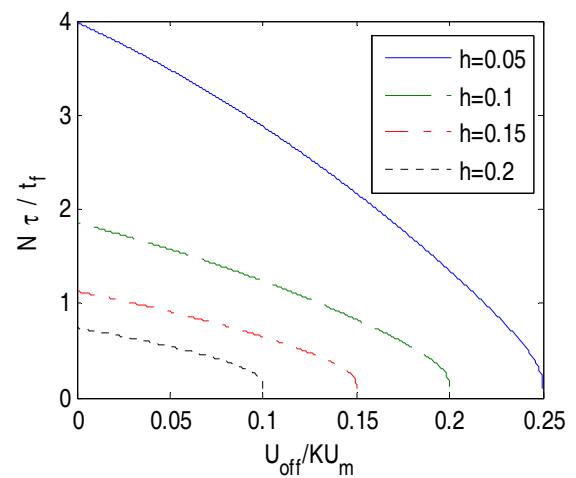
شکل ۱۴- نمایش بی بعد تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب آستانه خاموش شدن بی بعد به ازای $in = 0.7$



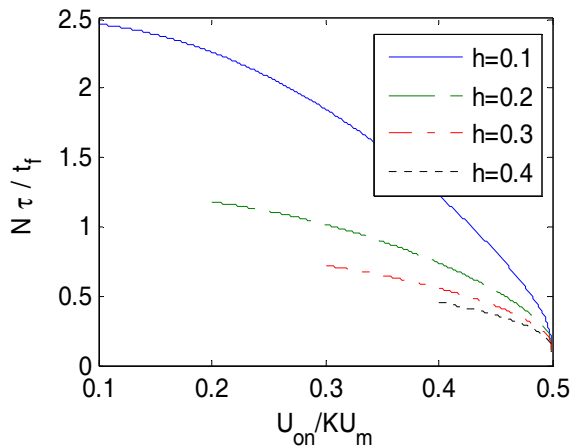
شکل ۱۱- نمایش بی بعد حداکثر تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب مقدار پسماند بی بعد



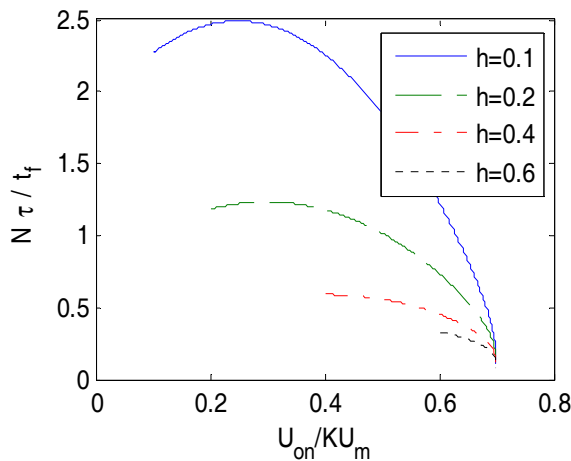
شکل ۱۵- نمایش تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب آستانه روشن شدن بی بعد به ازای $in = 0.3$



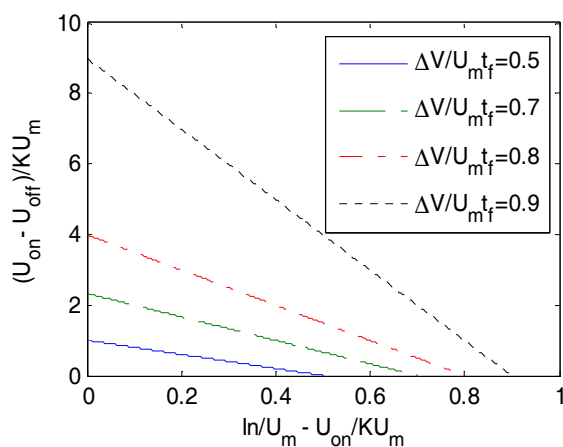
شکل ۱۲- نمایش تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب آستانه خاموش شدن بی بعد به ازای $in = 0.3$



شکل ۱۶- نمایش تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب آستانه روشن شدن بی بعد به ازای $in = 0.5$



شکل ۱۷- نمایش تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب آستانه روشن شدن بی بعد به ازای $in = 0.7$



شکل ۱۸- محدوده مجاز پارامترها (نواحی پایین خطوط) به ازای مقدار مشخص مصرف سوخت براساس تقریب خطی اولیه

همان طور که قبلاً اشاره شد، روابط مورد استفاده در خصوص محاسبه تعداد دفعات روشن شدن تراستر و مصرف سوخت تقریبی بوده است، اما به دلیل اینکه زمان نهایی باید (نسبت به تأخیر زمانی خالص اولیه) بزرگ انتخاب شود، دقت بالایی دارد. مقایسه نتایج این روابط تقریبی با مقادیر دقیق در پیوست (ب) آمده است. البته روابط دقیق محاسبه تعداد دفعات روشن شدن تراستر و مصرف سوخت نیز به صورت زیر قابل محاسبه است ($t_f > t_1$):

$$N = 1 + \text{floor} \left(\frac{t_f - t_1}{t_{on} + t_{off}} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\Delta V}{U_m t_{on}} = \text{floor} \left(\frac{t_f - t_1}{t_{on} + t_{off}} \right) + \text{sat} \left(\frac{t_{on} + t_{off}}{t_{on}} D \right) \quad (20)$$

که در آن،

$$D = \frac{t_f - t_1}{t_{on} + t_{off}} - \text{floor} \left(\frac{t_f - t_1}{t_{on} + t_{off}} \right) \quad (21)$$

و تابع اشباع به صورت رابطه (۲۲) تعریف می شود:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x & |x| \leq 1 \\ -1 & x < -1 \end{cases} \quad (22)$$

شایان ذکر است که روابط مستخرج تنها به ازای ورودی ثابت است (تحلیل استاتیکی). روابط فوق برای مدولاتورهایی که رفتار مشابهی دارند، نیز قابل استفاده است. البته در این صورت باید مقادیر تأخیر زمانی خالص اولیه، مدت زمان روشن بودن یک پالس و زمان خاموشی میان دو پالس از روابط مربوط به آن مدولاتور استفاده شود.

تحلیل استاتیکی مدولاتور پهنا و فرکانس پالس

در تحلیل استاتیکی مدولاتور پهنا و فرکانس پالس، محدوده ترجیحی پارامترهای مدولاتور تعیین می شود. به منظور تعیین این محدوده نیز به طور نمونه، محدوده ای از پارامترها را بدست می آورند که مصرف سوخت آن کمتر از ۸۰ درصد مقدار حداکثر باشد. تعیین این محدوده با استفاده از «تقریب خطی» بسیار ساده بوده و در شکل (۱۸) ملاحظه می شود. با توجه به این که به ازای مقدار صفر برای محور افقی شکل (۱۸)، مقدار حداکثر پسماند بی بعد می تواند یک باشد، نمودارهای شکل (۱۸) که مبتنی بر تقریب خطی رابطه (۱۴) است، قابل قبول نیست. با استفاده از یک رابطه خطی اصلاح شده مطابق رابطه (۲۳) و نمودارهای شکل (۱۹)، مقدار حداکثر پسماند بی بعد به مقدار یک محدود می شود:

$$h = \frac{\delta v - (in - u_{on})}{\delta v} \leq u_{on} \quad (23)$$

که در آن،

$$\delta v = \frac{\Delta V}{U_m t_f} \quad (24)$$

$$h^3 + (4x - 1)h^2 + 3x(2x - 1)h + x^2(4x - 3) = 0 \quad (۳۲)$$

حل رابطه فوق به ازای مقدار پسماند به صورت زیر بدست می‌آید:

$$h = \frac{1-4x}{3} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \quad (۳۳)$$

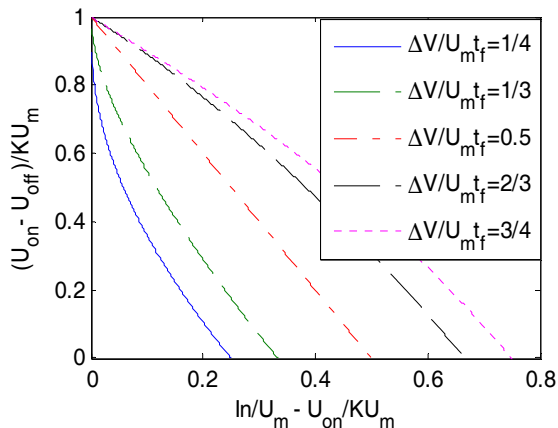
که در آن، $0 < x = in - u_{on} < 3/4$ و

$$R = \frac{(1-x)(20x^2+5x+2)}{2} \quad (۳۴)$$

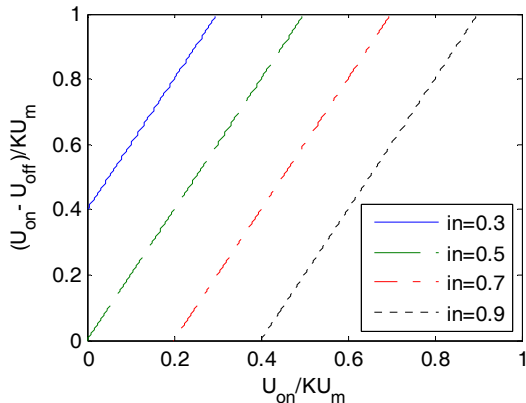
$$D = 3 \left[\frac{x(x-1)}{18} \right]^2 (16x^2 + 8x + 3) \quad (۳۵)$$

محدوده ترجیحی پارامترها به ازای مقادیر معین مصرف سوخت بی‌بعد محدودۀ ترجیحی پارامترها به ازای مقادیر معین مصرف سوخت بی‌بعد (۲۰) ترسیم شده است. شایان ذکر است در صورتی که نقاط ابتدایی و انتهایی نمودارها به یکدیگر متصل شود، همان رابطه تقریب خطی اصلاح‌شده (۲۳) حاصل می‌شود.

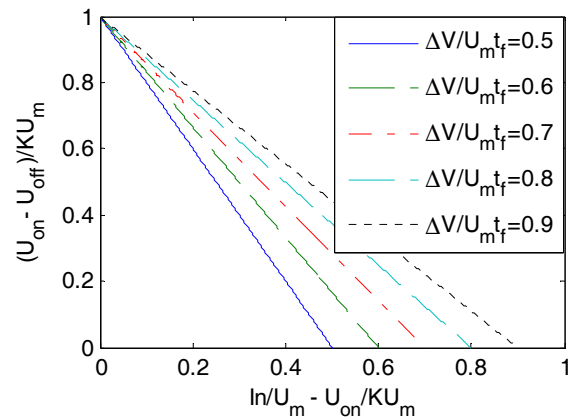
در ادامه، تحلیل استاتیکی به ازای مقادیر مختلف ورودی انجام می‌شود. در ابتدا نمودارهای محدودۀ ترجیحی مقدار پسماند بی‌بعد و آستانه روشن شدن بی‌بعد به ترتیب به ازای $\delta v = 0.5, 2/3, 3/4$ در شکل‌های (۲۱) تا (۲۳) به ازای مقادیر مختلف ورودی ترسیم شده است.



شکل ۲۰- محدوده مجاز پارامترها براساس حل غیرخطی



شکل ۲۱- محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد (نواحی پایین نمودارها و خط با شیب ۴۵ درجه) بر مبنای $\delta v = 0.5$ و ورودی‌های مختلف



شکل ۱۹- محدوده مجاز پارامترها (نواحی پایین خطوط) به ازای مقدار مشخص مصرف سوخت براساس تقریب خطی اصلاح‌شده

البته ترسیم نمودارها براساس روابط غیرخطی نیز میسر است. روابط تحلیلی با بازنویسی رابطه (۱۳) و از حل رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$\left(1 - \frac{h}{in - u_{on} - 1 + h}\right)^{\frac{1}{\delta v} - 1} = 1 + \frac{h}{in - u_{on}} \quad (۲۵)$$

حل رابطه فوق به ازای مقادیر $\delta v = 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4$ به ازای $\delta v = 0.5$ به سادگی قابل استخراج است. رابطه (۲۵) به ازای دو مقدار همان رابطه خطی (۱۴) می‌شود. حل رابطه مذکور به ازای دو مقدار $\delta v = 1/3, 2/3$ منجر به معادله جبری مرتبه دوم می‌شود که حل آن از روابط زیر حاصل می‌شود:

$$h = \frac{2-3x - \sqrt{x(4-3x)}}{2} \quad (\delta v = 1/3) \quad (۲۶)$$

که در آن، $0 < x = in - u_{on} < 1/3$ و

$$h = \frac{1-3x + \sqrt{-3x^2+2x+1}}{2} \quad (\delta v = 2/3) \quad (۲۷)$$

که در آن، $0 < x = in - u_{on} < 2/3$ است.

حل رابطه (۲۵) به ازای $\delta v = 1/4$ منجر به حل معادله

جبری مرتبه سوم زیر می‌شود:

$$h^3 + (4x - 3)h^2 + (6x^2 + 9x + 3)h + (4x - 1)(x - 1)^2 = 0 \quad (۲۸)$$

حل رابطه فوق به ازای مقدار پسماند به صورت زیر بدست می‌آید:

$$h = \frac{3-4x}{3} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \quad (۲۹)$$

که در آن، $0 < x = in - u_{on} < 0.25$ و

$$R = \frac{-x(20x^2+45x+27)}{54} \quad (۳۰)$$

$$D = 3 \left[\frac{x(x-1)}{18} \right]^2 (16x^2 - 40x + 27) \quad (۳۱)$$

همچنین، حل رابطه (۲۵) به ازای $\delta v = 3/4$ منجر به حل معادله جبری مرتبه سوم (رابطه ۳۲) می‌شود:

انکون نقطه تقاطع نمودارهای شکل (۲۲) با خط $h = u_{on}$ بدست می‌آید. در این حالت ($\delta v = 2/3$) مطابق رابطه (۲۵) معادله زیر برقرار است:

$$h^2 + 3x^2 + 3xh - h - 2x = 0 \quad (36)$$

تقاطع رابطه فوق با خط $h = u_{on}$ در شکل (۲۴) به صورت خط توپر ترسیم شده است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$u_{on} = \frac{3in-1 - \sqrt{-3in^2+2in+1}}{2} > 0 \quad (37)$$

عبارت زیر رادیکال در رابطه اخیر به ازای $0 \leq in \leq 1$ نامنفی است. بنابراین شرط وجود تقاطع، $in > 2/3$ می‌شود. در شکل (۲۲) نیز نقاط شروع منحنی‌ها در محور افقی از رابطه (۲۲) نیز نقاط شروع منحنی‌ها در محور افقی از رابطه (۲۲) در این حالت ($\delta v = 2/3$)، محدوده شروع از محور افقی تا نقطه تقاطع مذکور با فرض $in > 2/3$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

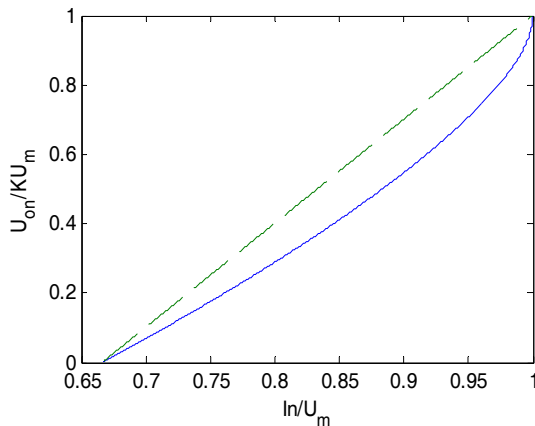
$$in - 2/3 \leq u_{on} \leq \frac{3in-1 - \sqrt{-3in^2+2in+1}}{2} \quad (38)$$

در صورتی که $in < 2/3$ باشد، نقطه شروع از $u_{on} = 0$ است. همچنین، می‌توان نشان داد که کران پایین u_{on} (در نمودار تقاطع مذکور) به ازای δv های مختلف به صورت $in - \delta v \leq u_{on}$ است.

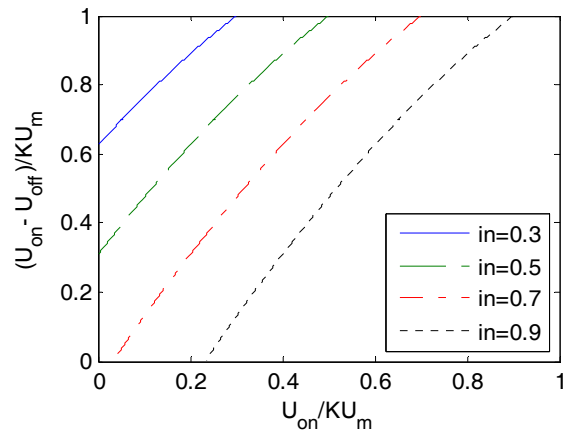
با استفاده از تقریب خطی (۲۳)، تقاطع نمودارهای مذکور با خط $h = u_{on}$ به سادگی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$u_{on} = \frac{in - \delta v}{1 - \delta v} \quad (39)$$

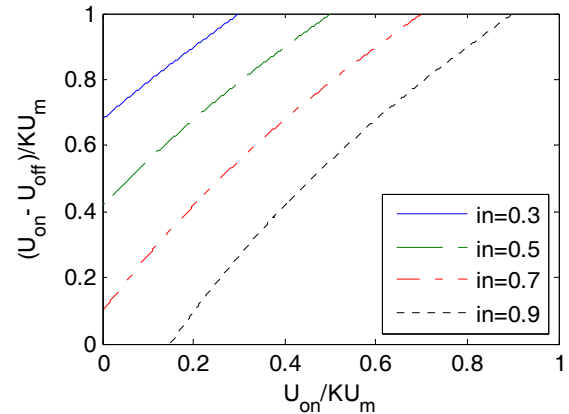
البته تقریب خطی مذکور خطا دارد و مقدار آن با خط‌چین در مقایسه با مقدار دقیق (خط توپر) در شکل (۲۴) به ازای مقدار مصرف سوخت بی‌بعد برابر دوسوم ملاحظه می‌شود.



شکل ۲۴- نمودار نقطه تقاطع دو نمودار $h = u_{on}$ با نمودار پسماند بی‌بعد بر حسب $(in - u_{on})$ به ازای مصرف سوخت بی‌بعد برابر دوسوم ($\delta v = 2/3$)



شکل ۲۲- محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد (نواحی پایین نمودارها و خط با شیب ۴۵ درجه) بر مبنای $\delta v = 2/3$ و ورودی‌های مختلف

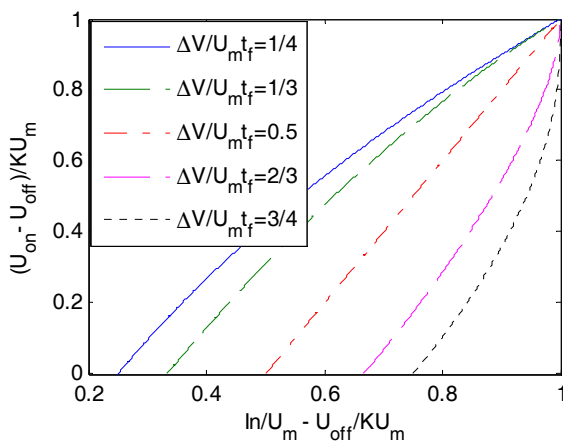


شکل ۲۳- محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد (نواحی پایین نمودارها و خط با شیب ۴۵ درجه) بر مبنای $\delta v = 3/4$ و ورودی‌های مختلف

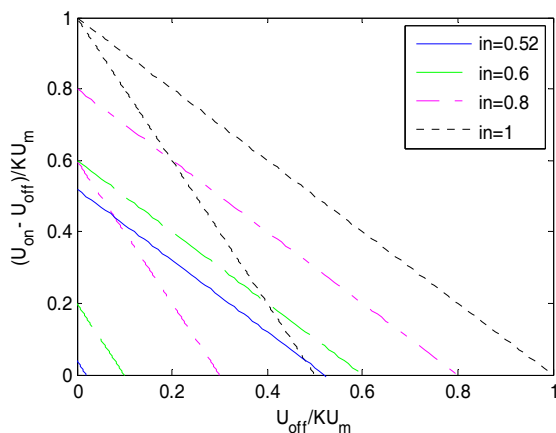
نمودارهای ترسیم شده در شکل‌های (۲۱) تا (۲۳)، مقادیر آستانه روشن شدن بی‌بعد و پسماند بی‌بعد را به ازای مقادیر معین مصرف سوخت بی‌بعد نشان می‌دهد. البته بخشی از این نمودارها که شرط $h \leq U_{on}/KU_m$ در آنها برقرار نیست، باید حذف شود. به عبارت دیگر، محدوده بالای «خط با شیب ۴۵ درجه» قابل قبول نیست. به طور نمونه، در شکل (۲۱) که به ازای $\delta v = 0.5$ ترسیم شده است، نمودار به ازای $in = 0.3$ کلاً بالای خط ۴۵ درجه قرار گرفته است. نمودار این خط به صورت $h = 0.4 + u_{on}$ است. این بدان معناست که به ازای $in = 0.3$ ، مقدار δv تحت شرایط مفروض مقدار نیم را نخواهد گرفت. البته در این حالت، نواحی به ازای $\delta v < 0.5$ نواحی پایین «خط با شیب ۴۵ درجه» خواهد بود. در حالت $\delta v = 0.5$ ، با استفاده از رابطه (۱۴) یا (۲۳) نقطه تقاطع نمودارها با خط $h = u_{on}$ به صورت $h = u_{on} = 2in - 1$ بدست می‌آید، که به ازای $in < 0.5$ جواب ندارد.

غیرخطی مستخرج، در شکل (۲۵) ترسیم شده است. توجه این که در صورتی که نقاط ابتدایی و انتهایی نمودارها به یکدیگر متصل شود، همان رابطه تقریب خطی اصلاح شده (۲۳) یا (۴۰) حاصل می‌شود.

در ادامه، در شکل‌های (۲۶) و (۲۷) محدوده مجاز به ازای مقادیر مشخص ورودی بی‌بعد، ترسیم و تحلیل می‌شود. در این دو شکل، محدوده مجاز بین دو خط هم‌شکل (و هم‌رنگ)، قرار می‌گیرد. خط فوقانی ناشی از شرط روشن شدن مدولاتور است که اعمال شده است $(in > u_{on} \rightarrow u_{off} < in - h)$. شرط اخیر برحسب دقت و عملکرد سیستم کنترل ممکن است منظور شود یا نشود. به عبارت دیگر، اگر محدوده مذکور $(u_{off} < in - h)$ اعمال نشود، مدولاتور ممکن است روشن نشود و این موضوع هم می‌تواند مطلوب باشد و هم نامطلوب. روشن نشدن مدولاتور سبب کاهش مصرف سوخت می‌شود، اما ممکن است خطای سیستم کنترل از حد مجاز فراتر رود.



شکل ۲۵- محدوده مجاز پارامترها (محدوده بالای خطوط) به ازای مقدار مشخص مصرف سوخت براساس حل غیرخطی



شکل ۲۶- محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد (ناحیه پایین خطوط) $h < in - u_{off}$ و سمت راست/ بالای خطوط متناظر هم‌شکل) به ازای $\delta v < 0.5$ و ورودی‌های مختلف

در ادامه، تحلیل بر حسب u_{off} انجام داده می‌شود. با استفاده از رابطه خطی اصلاح شده (۲۳) می‌توان نوشت:

$$h = \frac{(in - u_{off}) - \delta v}{1 - \delta v} > 0 \quad (40)$$

با برقراری شرط (۸)، مقدار پسماند بی‌بعد محاسبه شده از رابطه فوق همیشه مثبت است. به عبارت دیگر،

$$in - u_{off} < 1 \rightarrow \frac{(in - u_{off}) - \delta v}{1 - \delta v} > 0 \quad (41)$$

البته رابطه (۳۹) به ازای $\delta v = 0.5$ حل دقیق را نتیجه می‌دهد؛ اما حل رابطه مربوطه به ازای دو مقدار $\delta v = 1/3, 2/3$ منجر به حل معادله جبری مرتبه دوم می‌شود که از روابط زیر حاصل می‌شود:

$$h = \frac{3y - 2 + \sqrt{y(4 - 3y)}}{2} \quad (\delta v = 1/3) \quad (42)$$

که در آن، $1/3 < y = in - u_{off} < 1$ و

$$h = \frac{3y - 1 - \sqrt{-3y^2 + 2y + 1}}{2} \quad (\delta v = 2/3) \quad (43)$$

که در آن، $2/3 < y = in - u_{on} < 1$

حل رابطه (۲۵) به ازای $\delta v = 1/4$ منجر به حل معادله

جبری مرتبه سوم زیر می‌شود:

$$h^3 - (4y - 3)h^2 + (6y^2 - 9y + 3)h - (4y - 1)(y - 1)^2 = 0 \quad (44)$$

حل رابطه فوق برحسب مقدار پسماند به صورت زیر بدست می‌آید:

$$h = \frac{4y - 3}{3} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \quad (45)$$

که در آن، $0.25 < y = in - u_{off} < 1$ و

$$R = \frac{y(20y^2 + 45y + 27)}{54} \quad (46)$$

$$D = 3 \left[\frac{y(y-1)}{18} \right]^2 (16y^2 - 40y + 27) \quad (47)$$

همچنین، حل رابطه (۲۵) به ازای $\delta v = 3/4$ منجر به حل معادله جبری مرتبه سوم در رابطه (۴۸) می‌شود:

$$h^3 - (4y - 1)h^2 + 3y(2y - 1)h - y^2(4y - 3) = 0 \quad (48)$$

حل رابطه فوق برحسب مقدار پسماند به صورت زیر بدست می‌آید:

$$h = \frac{4y - 1}{3} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} \quad (49)$$

که در آن، $3/4 < y = in - u_{off} < 1$ و

$$R = \frac{(y-1)(20y^2 + 5y + 2)}{2} \quad (50)$$

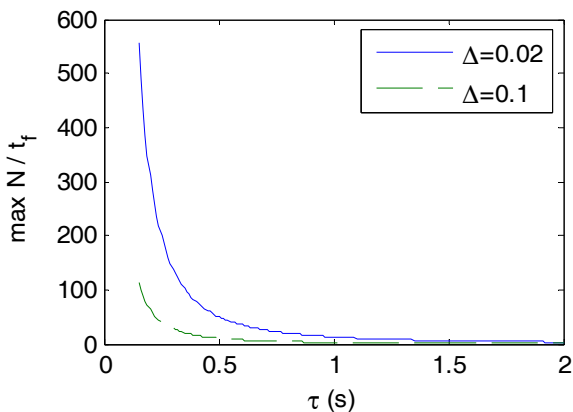
$$D = 3 \left[\frac{y(y-1)}{18} \right]^2 (16y^2 + 8y + 3) \quad (51)$$

محدوده ترجیحی پارامترها به ازای مقادیر معین مصرف سوخت

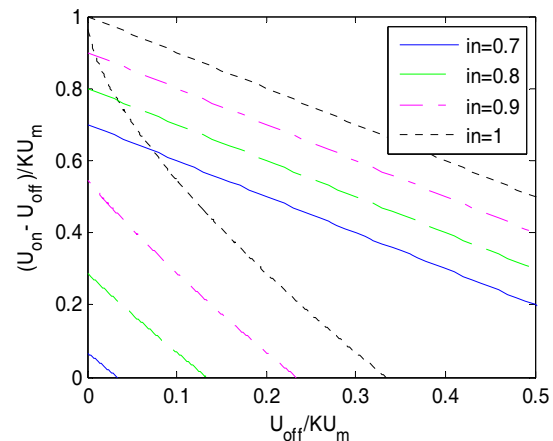
بی‌بعد $(\delta v = 0.25, 1/3, 0.5, 2/3, 0.75)$ با استفاده از روابط

- می‌یابد (با فرض ثابت بودن ثابت زمانی فیلتر و زمان نهایی).
- با توجه به مطالعه پارامتری در تحلیل استاتیکی، حد بالایی برای آستانه روشن شدن حاصل نمی‌شود.
- با استفاده از رابطه تقریبی مصرف سوخت، ثابت زمانی فیلتر تأثیری بر مصرف سوخت ندارد (البته به ازای انتخاب مناسب t_1 و زمان نهایی، تقریب دقیقی است).
- شرایط و مقدار حداکثر تعداد دفعات روشن شدن تراستر مطابق روابط (۱۷) و (۱۸) به‌طور تحلیلی استخراج شد که نتایج آن در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) ترسیم شده است.

به منظور تعیین محدوده پارامترها، اگر حداقل عرض پالس تعیین شده باشد، انتخاب بازه «مقدار پسماند بی‌بعد» سهل‌الوصول‌تر است. برای این منظور با استفاده از شکل (۲۸)، حداقل ثابت زمانی فیلتر بدست می‌آید. با تعیین حداقل مقدار ثابت زمانی فیلتر و با استفاده از شکل (۲۹) می‌توان مقدار حداکثر پسماند بی‌بعد را تعیین نمود. البته این محدوده تنها براساس معیار تعداد دفعات روشن شدن تراستر است. با محدوده تعیین شده برای پسماند بی‌بعد، باید تعیین محدوده برای آستانه روشن شدن (یا آستانه خاموش شدن) مدولاتور براساس معیار مصرف سوخت (و احتمالاً اصلاح محدوده نخست) انجام شود. در ادامه، به نحوه انتخاب پارامترها بر مبنای معیار مصرف سوخت پرداخته می‌شود. ابتدا حالت خاص $u_{off} = 0$ را در نظر بگیرید. در این حالت، نمودار مصرف سوخت بی‌بعد بر حسب ورودی بی‌بعد در شکل (۳۰) ملاحظه می‌شود. در این شکل، به‌طور نمونه به ازای $h = 0.2$ نمودار از مقدار $in = 0.2$ با زاویه‌ای عمودی (یا نزدیک به عمودی) به سمت بالا شروع شده است. البته مقدار مصرف سوخت به ازای $in < 0.2$ برابر صفر می‌شود (به ازای $h = 0.2$). به ازای هر مقدار پسماند بی‌بعد، در محور افقی به ازای همان مقدار، منحنی به‌صورت عمودی (یا نزدیک به عمودی) به سمت بالا شروع می‌شود.



شکل ۲۸- حداکثر تعداد دفعات روشن شدن تراستر (تقسیم بر زمان نهایی) برحسب ثابت زمانی فیلتر

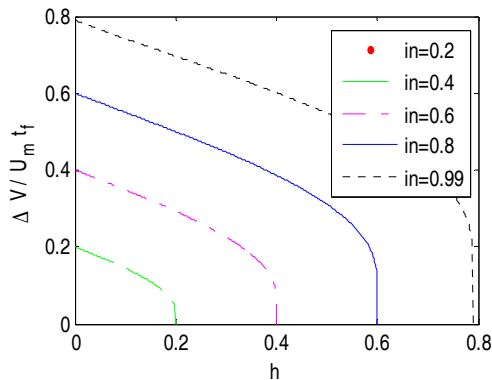


شکل ۲۷- محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد (ناحیه پایین خطوط $h < in - u_{off}$ سمت راست/ بالای خطوط متناظر هم‌شکل) به ازای مقدار $\delta v < 2/3$ و ورودی‌های مختلف

بحث و نتایج

با توجه به نمودارهای متعددی که در تحلیل استاتیکی مدولاتور پهنا و فرکانس پالس ترسیم شده است، موارد زیر قابل استنتاج است. البته این موارد، مشروط بر نرسیدن مدولاتور به مرحله اشباع و نیز ورودی ثابت است.

- مطابق شکل (۳)، با افزایش مقدار پسماند بی‌بعد، زمان روشن بودن تراستر افزایش می‌یابد (با فرض ثابت بودن آستانه روشن شدن مدولاتور).
- مطابق شکل (۴)، با افزایش مقدار پسماند بی‌بعد، زمان خاموش بودن تراستر افزایش می‌یابد (با فرض ثابت بودن آستانه روشن شدن مدولاتور).
- مطابق شکل (۵)، با افزایش مقدار پسماند بی‌بعد، «حداقل عرض پالس بی‌بعد» (Δ/τ) افزایش می‌یابد.
- مطابق شکل (۶)، با افزایش مقدار پسماند بی‌بعد، مقدار ثابت زمانی فیلتر، به ازای یک عرض پالس مشخص، باید کاهش یابد.
- با افزایش مقدار پسماند بی‌بعد، مقدار مصرف سوخت بی‌بعد ممکن است کاهش یا افزایش یابد. اگر افزایش مقدار پسماند بی‌بعد از طریق کاهش آستانه خاموش شدن و ثابت ماندن آستانه روشن شدن باشد، مصرف سوخت بی‌بعد افزایش می‌یابد (شکل ۷)؛ اما اگر این افزایش از طریق افزایش آستانه روشن شدن و ثابت ماندن آستانه خاموش شدن باشد، مصرف سوخت بی‌بعد کاهش می‌یابد (شکل ۸).
- مطابق شکل (۱۱)، با افزایش مقدار پسماند بی‌بعد، تعداد حداکثر دفعات روشن شدن تراستر (به ازای تغییر ورودی) کاهش



شکل ۳۲- نمایش بی بعد مصرف سوخت بر حسب مقدار پسماند به ازای مقادیر مختلف ورودی و $u_{off} = 0.2$

همان طور که از شکل (۳۰) ملاحظه می شود، در حالت خاص $u_{off} = 0$ و به طور نمونه به ازای $in = 0.5$ و به ازای مقادیر مختلف پسماند بی بعد، مصرف سوخت بی بعد نمی تواند از مقدار نیم بزرگتر باشد. در حالت کلی با توجه به شکل (۳۰) می توان نوشت:

$$\max_h(\delta v) = in \quad \text{for } u_{off} = 0 \quad (52)$$

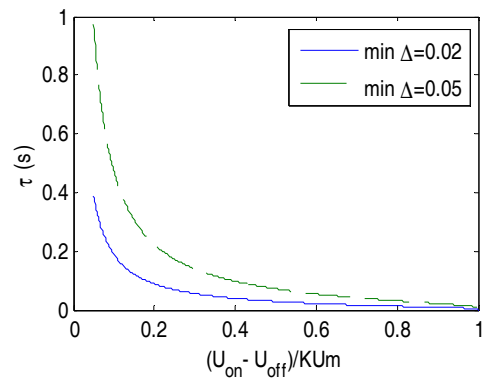
البته مقدار حداکثر مذکور به ازای $h \rightarrow 0$ حاصل می شود. اکنون سؤال این است که آیا می توان به طور مشابه رابطه ای در حالت $u_{off} \neq 0$ نوشت. برای بررسی این موضوع دو شکل (۳۱) و (۳۲) ترسیم شده است. همان طور که از شکل (۳۱) ملاحظه می شود، به ازای $u_{off} = 0.1$ و به طور نمونه $in = 0.6$ و مقادیر مختلف پسماند بی بعد، مصرف سوخت بی بعد نمی تواند از مقدار نیم بزرگتر باشد. در این حالت می توان نوشت:

$$\max_h(\delta v) = in - u_{off} \quad (53)$$

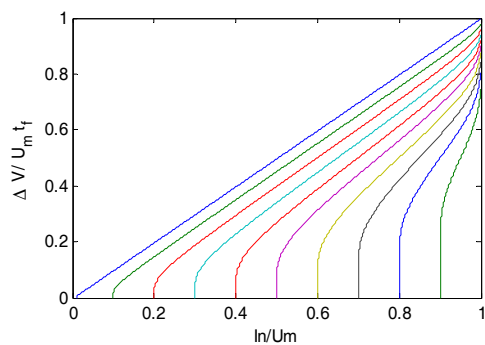
البته مقدار حداکثر مذکور به ازای $h \rightarrow 0$ حاصل می شود. لازم به ذکر است که روابط (۵۲) و (۵۳) با استفاده از نمودارها استخراج شده است و نه حل تحلیلی. لذا اگرچه دقت بسیار بالایی دارد اما ممکن است کاملاً دقیق نباشد.

همان طور که در ابتدا اشاره شد، در تحلیل استاتیکی، به طور نمونه ممکن است ۲۵ درصد فوقانی نمودارهای مصرف سوخت از محدوده پارامترها حذف شود. نکته ای که در استخراج بازه ها باید در نظر گرفت این است که اعمال مصرف سوخت بی بعد $\delta v < 0.7$ برای ورودی بی بعد $in = 0.3$ معقول نیست. به عبارت دیگر، به ازای هر ورودی بی بعد باید سقف معقولی برای مصرف سوخت در نظر گرفت. در مطالعه حاضر، این سقف با توجه به رابطه (۵۳) باید تعیین شود. اکنون، نمودارهای تعیین محدوده مبتنی بر معادلات خطی به صورت شکل (۳۳) ترسیم می شود. خط ضخیم با شیب ۴۵ درجه نمایانگر نمودار خط $h = u_{on}$ است.

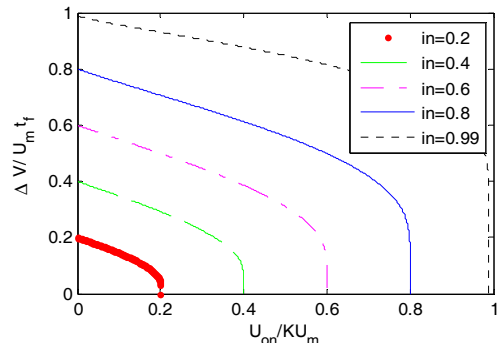
با استفاده از رابطه (۲۳) که مبتنی بر تقریب خطی اصلاح شده



شکل ۳۹- مقدار ثابت زمانی فیلتر بر حسب مقدار پسماند بی بعد به ازای مقادیر حداقل پهنای پالس ۰/۰۲ و ۰/۰۵ ثانیه

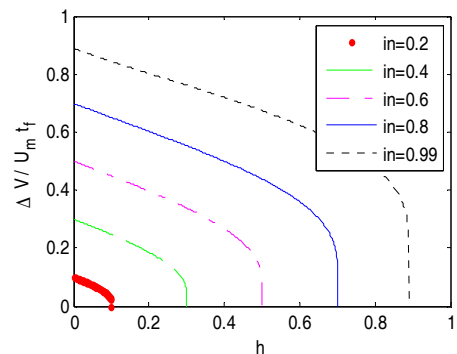


الف) به ازای $h = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$

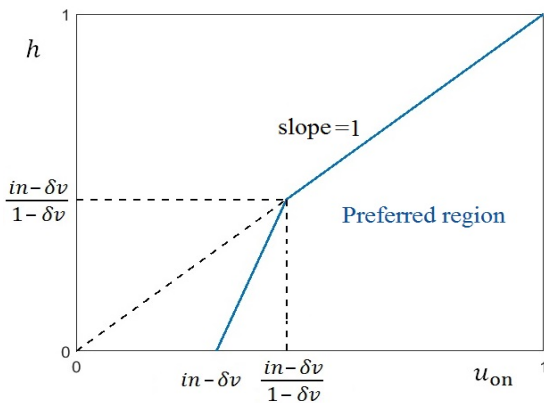


ب) به ازای ورودی های بی بعد مختلف

شکل ۳۰- نمایش بی بعد مصرف سوخت در حالت خاص $u_{off} = 0$



شکل ۳۱- نمایش بی بعد مصرف سوخت بر حسب مقدار پسماند به ازای مقادیر مختلف ورودی و $u_{off} = 0.1$



شکل ۳۴- نمودار شماتیک برای محدوده ترجیحی (مجاز) به صورت «مقدار پسماند بی‌بعد» برحسب «آستانه روشن شدن بی‌بعد» براساس تقریب خطی اصلاح‌شده (محدوده پایین)

با استفاده از رابطه (۵۳)، ممکن است مصرف سوخت بی‌بعد به صورت زیر نوشته شود:

$$\delta v = \mu(in - u_{off}), \mu < 1 \quad (57)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه (۵۶) می‌توان نوشت:

$$u_{off} \geq in - \frac{h}{1-(1-h)\mu} \quad (58)$$

شرط مثبت بودن آستانه روشن شدن مدولاتور مستخرج از رابطه اخیر به صورت رابطه (۵۹) نوشته می‌شود:

$$\mu \geq \frac{in-h}{(1-h)in} \quad (59)$$

این که مقدار مصرف سوخت بی‌بعد چه کسری از یک منظور شود، با استفاده از تحلیل دینامیکی و سیستمی حاصل می‌شود. اگر کسر کوچکی انتخاب شود، ممکن است اشتراک محدوده‌ها برای آنالیز استاتیکی، دینامیکی و سیستمی به صفر برسد. اگر مقدار مصرف سوخت بی‌بعد بزرگ انتخاب شود، محدوده حاصل شامل نواحی نامطلوبی خواهد بود. با تحلیل حاضر می‌توان براحتی این مقدار را تغییر داد و محدوده جدیدی اتخاذ نمود. به طور نمونه، در جدول (۲) با استفاده از نامساوی (۵۸) تأثیر ضریب μ با فرض $h = 0.1$ ملاحظه می‌شود. البته ضریب μ باید متغیر در نظر گرفته شود. یک نمونه انتخاب برای این ضریب به صورت زیر است:

$$\mu = \mu_1 - (\mu_1 - \mu_0)(1 - in)^n \quad (60)$$

که در آن، μ_0 و μ_1 به ترتیب مقدار μ به ازای ورودی بی‌بعد صفر و یک است. در حالت خاص و انتخاب خطی می‌توان نوشت:

$$\mu = 1 - \frac{in}{2} \quad (61)$$

با جایگذاری رابطه (۶۰) در رابطه (۵۸) با اتخاذ حالت تساوی، رابطه آستانه خاموش شدن بی‌بعد بر حسب هسیتیزیس بی‌بعد

است، می‌توان نوشت:

$$u_{on} = in - (1 - h)\delta v \quad (54)$$

به عبارت دیگر، با توجه به شکل (۳۳)، محدوده آستانه روشن شدن مدولاتور براساس تقریب خطی اصلاح‌شده به صورت زیر نوشته می‌شود، مشروط به اینکه $u_{on} \geq h$ باشد:

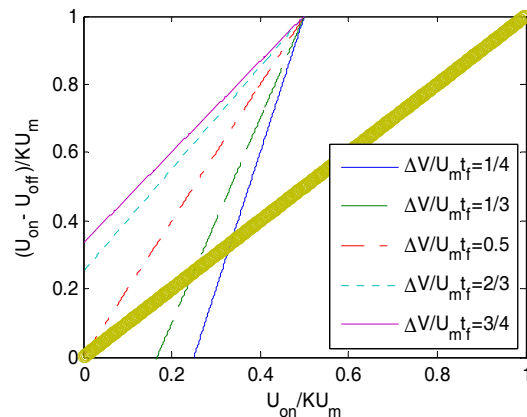
$$u_{on} \geq in - (1 - h)\delta v \quad (55)$$

از طرفی با توجه به رابطه فوق، محدوده آستانه خاموش شدن مدولاتور براساس تقریب خطی اصلاح‌شده به صورت رابطه (۵۶) نوشته می‌شود؛ مشروط به اینکه $u_{off} \geq 0$ باشد:

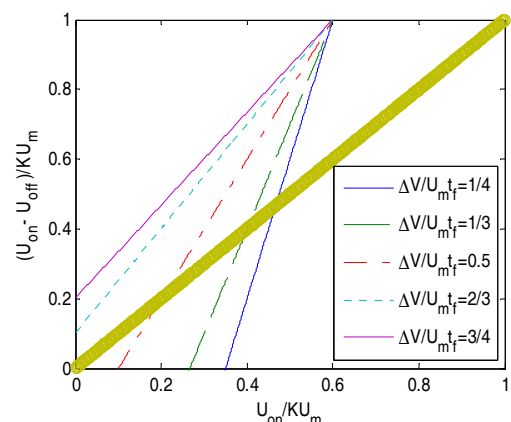
$$u_{off} \geq in - \delta v - h(1 - \delta v) \quad (56)$$

بدیهی است دو رابطه اخیر، عملاً یک شرط است و از هم مستقل نیستند. اگر از دو طرف رابطه نخست، مقدار پسماند بی‌بعد کسر شود، رابطه دوم حاصل می‌شود.

در شکل (۳۴) نیز نموداری شماتیک برای محدوده ترجیحی به صورت «مقدار پسماند بی‌بعد» برحسب «آستانه روشن شدن بی‌بعد» براساس تقریب خطی اصلاح‌شده ترسیم شده است که گویای رابطه (۵۵) به انضمام شرط $u_{on} \geq h$ است.



الف) به ازای $in = 0.5$



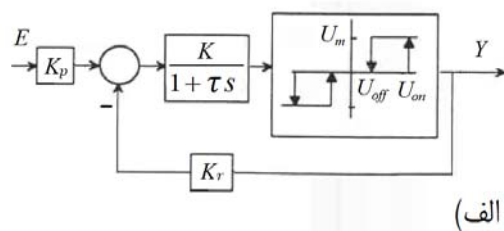
ب) به ازای $in = 0.6$

شکل ۳۳- محدوده مجاز (محدوده پایین خطوط و خط با شیب ۴۵ درجه) به ازای مقدار مشخص مصرف سوخت براساس تقریب خطی

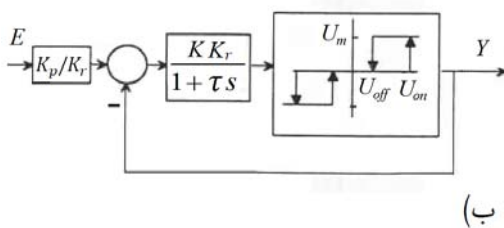
تحلیلی استخراج شده است. همچنین، روابط تحلیلی دقیق به منظور محاسبه دو معیار عملکرد مصرف سوخت و تعداد دفعات روشن شدن عملکرد تراستر برای یک کلاس از مدولاتورها با فرض ورودی ثابت بدست آمده است. البته در تحلیل مسئله از روابط تقریبی آن (که دقت بالایی دارد) استفاده شده و بر مبنای آن، مطالعه پارامتری جامعی صورت پذیرفته است. به علت وجود حل تحلیلی و گروه‌بندی مجدد پارامترها، تعداد پارامترها کاهش یافته و مصرف سوخت بی‌بعد و همچنین تعداد دفعات روشن شدن تراستر (گروه‌بندی شده) بر حسب دو پارامتر گروه‌بندی شده ترسیم شده است. حل تحلیلی نشان می‌دهد که مصرف سوخت تابعی از ثابت زمانی فیلتر نیست. روابط تحلیلی محدوده مجاز پارامترهای بی‌بعد به ازای مقادیر معین مصرف سوخت، استخراج و محدوده آنها ترسیم شده است.

نکته جالب درخصوص تعداد دفعات روشن شدن تراستر این است که تعداد دفعات روشن شدن تراستر به ازای پارامتر «تفاضل ورودی بی‌بعد و آستانه روشن شدن بی‌بعد»، ابتدا رفتاری صعودی و سپس نزولی دارد که مقدار حداکثر آن به صورت تحلیلی استخراج شده است. مقدار «حداکثر ممکن تعداد دفعات روشن شدن تراستر (به صورت گروه‌بندی شده)» تنها تابعی از مقدار پسماند بی‌بعد می‌شود. در صورت مشخص بودن مقدار حداقل عرض پالس (از روی مقادیر فرکانس کاری مدولاتور و ثابت زمانی دینامیک تراستر)، می‌توان رابطه «حداکثر ممکن تعداد دفعات روشن شدن تراستر تقسیم بر زمان نهایی» را بر حسب مقدار «حداقل عرض پالس» و «ثابت زمانی فیلتر» استخراج نموده و نتایج آن را ترسیم کرد.

در نهایت باید گفت، تحلیل حاضر علاوه بر ارائه محدوده مجاز در آنالیز استاتیکی برای مدولاتور با پارامترهای ثابت، اتخاذ یک مدولاتور پهنا و فرکانس پالس بر مبنای پارامترهای متغیر بر حسب مقدار ورودی را نیز میسر می‌سازد.



(الف)



(ب)

شکل ۳۵- مدولاتور پهنا و فرکانس پالس (الف) با فیدبک غیر واحد (ب) با ادغام بلوک بهره فیدبک در پیش‌بهره و بهره فیلتر

بدست می‌آید. با فرض مشخص بودن مقدار پسماند بی‌بعد نیز آستانه روشن شدن مدولاتور معلوم می‌شود. رابطه حاصل می‌تواند برای مدولاتور پهنا و فرکانس پالس (با تنظیم μ_0 ، μ_1 و n) بکار رفته و عملکرد آن ارزیابی شود. البته همان‌طور که قبلاً اشاره شد، با آنالیز استاتیکی این کار به تنهایی میسر نیست.

نکته حائز اهمیت این است که با محدوده‌های ارائه شده در منابع، مشخص نمی‌شود که مقدار کمی خروج از محدوده مجاز/ ترجیحی چه میزان کاهش عملکرد را دارد. آیا تغییرات معیار عملکرد، تدریجی و یا ناگهانی است؟ در مقابل، روابط استخراج شده در تحلیل حاضر، این مهم را نیز بدست می‌دهد. شایان ذکر است که برای کاهش این ضعف، در مطالعه مرجع [۲۵] در نهایت به عنوان پیشنهاد، توصیه شده است، که به جای دو ناحیه، سه ناحیه منظور شود (افزودن ناحیه واسطه). البته، مطالعه مرجع [۲۵] به صورت عددی بوده و شامل تحلیل سیستمی با نویز ورودی برای مود پایدارسازی و آرام‌سازی بوده است. برای حالت مذکور، ارائه حل تحلیلی - تقریبی دشوار است.

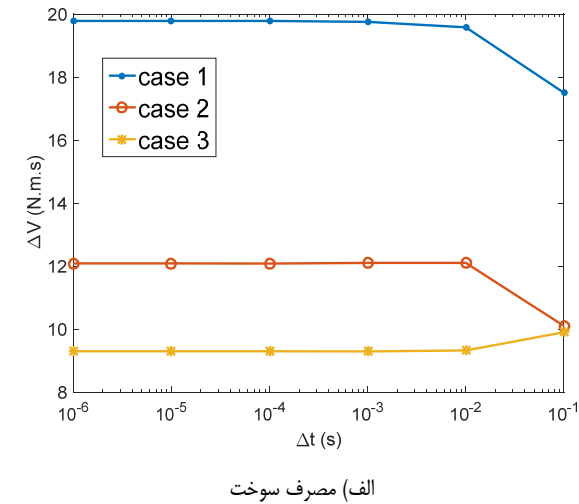
در ارائه یک روند طراحی مطابق منابع، علاوه بر توضیحات بخش مقدمه، باید گفت که تحلیل با «ورودی صفر و تنها با اعمال نویز» در هر یک از تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی و سیستمی باید مدنظر قرار گیرد [۲۵، ۲۶]. به علاوه، تحلیل مود پایدارسازی (به عنوان حلقه داخلی مدار نشانه‌رویی) نیز در مرجع [۲۵] توصیه شده است تا در نهایت با اشتراک نواحی مجاز در چهار تحلیل مذکور، محدوده مجاز نهایی استخراج شود.

جدول ۲- تأثیر ضریب μ در پارامترها به ازای $h = 0.1$

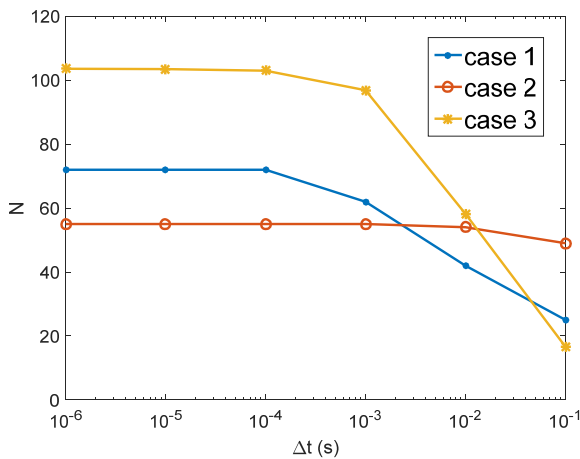
| μ | u_{off} | u_{on} |
|-------|----------------------|----------------------|
| ۰ | $\geq in - 0.1 > 0$ | $\geq in > 0$ |
| ۰/۱ | $\geq in - 0.11 > 0$ | $\geq in - 0.01 > 0$ |
| ۰/۲ | $\geq in - 0.12 > 0$ | $\geq in - 0.02 > 0$ |
| ۰/۳ | $\geq in - 0.14 > 0$ | $\geq in - 0.04 > 0$ |
| ۰/۴ | $\geq in - 0.16 > 0$ | $\geq in - 0.06 > 0$ |
| ۰/۵ | $\geq in - 0.18 > 0$ | $\geq in - 0.08 > 0$ |
| ۰/۶ | $\geq in - 0.22 > 0$ | $\geq in - 0.12 > 0$ |
| ۰/۷ | $\geq in - 0.27 > 0$ | $\geq in - 0.17 > 0$ |
| ۰/۸ | $\geq in - 0.36 > 0$ | $\geq in - 0.26 > 0$ |
| ۰/۹ | $\geq in - 0.53 > 0$ | $\geq in - 0.43 > 0$ |

نتیجه گیری

در این تحقیق، محدوده ترجیحی پارامترهای مدولاتور پهنا و فرکانس پالس با فرض ورودی ثابت (آنالیز استاتیکی) به صورت

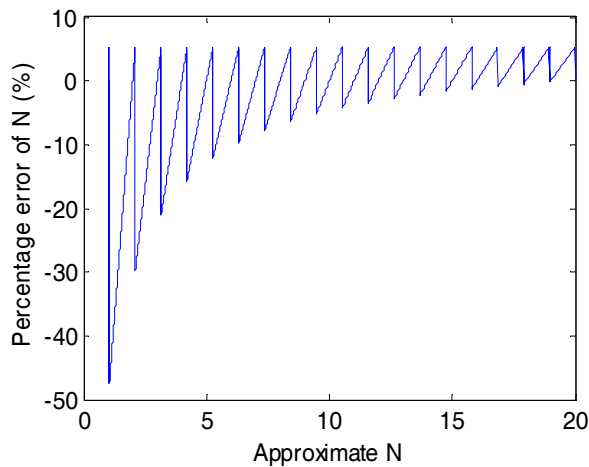


الف) مصرف سوخت



ب) تعداد دفعات روشن شدن تراستر

شکل ۳۶- دقت حل عددی برای آنالیز استاتیکی با استفاده از روش اویلر به ازای سه دسته شرایط جدول ۳



شکل ۳۷- درصد خطای رابطه تقریبی تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب مقدار تقریبی آن به ازای $t_f/t_1 = 20$

پیوست الف: مدولاتور با فیدبک غیر واحد

تقریب ساده مدولاتور پهنا و فرکانس پالس بدون پیش‌بهره (نسبت متوسط خروجی به ورودی مدولاتور) مقدار واحد است. اگر فیدبک مدولاتور غیر واحد باشد (شکل ۳۵ الف)، می‌توان آن را در مقدار پیش‌بهره و بهره فیلتر ادغام نمود (شکل ۳۵ ب). بنابراین، نیازی به اعمال بلوک فیدبک غیر واحد نیست.

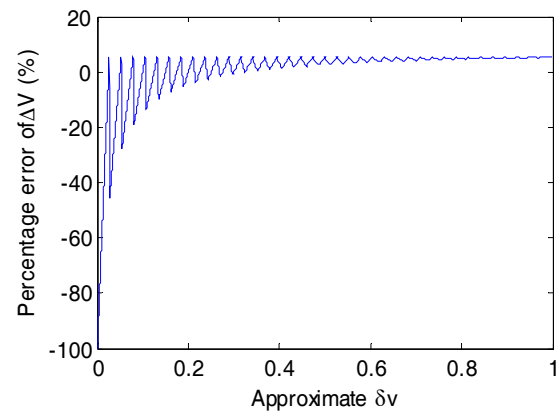
پیوست ب: حل عددی و دقت روابط تقریبی

تعیین مقدار گام انتگرال‌گیری زمانی به‌طور صحیح، در نتایج حل بسیار حائز اهمیت است. در شکل (۳۶) نتایج حل با استفاده از روش عددی اویلر برحسب مقدار گام انتگرال‌گیری زمانی (Δt) آمده است. نمودارهای این شکل به ازای مقادیر جدول (۳) و برای ۶ مقدار گام زمانی انتگرال‌گیری که با علائم دایره یا مربع در شکل مشخص شده است، ترسیم شده است. همان‌طور که از این شکل ملاحظه می‌شود، با تغییر پارامترها مقدار گام زمانی مناسب انتگرال‌گیری (با توجه به دقت و بار محاسباتی) تغییر می‌کند. پارامترهای سه حالت ۱، ۲ و ۳ در جدول (۳) برای نشان دادن این موضوع انتخاب شده است. در ادامه، تفاوت دقت روابط تقریبی تعداد دفعات روشن شدن تراستر و مصرف سوخت با روابط دقیق (۱۹) و (۲۰) بررسی می‌شود. در شکل (۳۷) نمودار درصد خطای رابطه تقریبی تعداد دفعات روشن شدن تراستر بر حسب مقدار تقریبی آن به ازای $t_f/t_1 = 20$ ملاحظه می‌شود. البته به ازای مقادیر تک رقمی N از رابطه تقریبی، ممکن است مقدار خطا زیاد شود. البته این افزایش بدهی است؛ چرا که خطای یک واحد در N به ازای مقدار ۱۰، ده درصد خطا ایجاد خواهد کرد. به ازای مقادیر بزرگ N (در محور افقی)، مقدار درصد خطا از رابطه تقریبی $100/(t_f/t_1)$ قابل محاسبه است. درصد خطای رابطه تقریبی مصرف سوخت به ازای $t_f/t_1 = 20$ و $t_{on}/t_1 = 0.5$ در شکل (۳۸) نمایش داده شده است. در این شکل نیز باید توجه داشت که اگرچه به ازای مقادیر کوچک مصرف سوخت بی‌بعد مقدار خطا زیاد شده است، اما درصد خطای ۶۰٪ در مقدار یک‌صدم ناچیز تلقی می‌شود. شایان ذکر است که در دو شکل اخیر، مقدار مثبت خطا به این معناست که مقدار تقریبی بزرگتر از مقدار دقیق شده است.

جدول ۳- مقادیر پارامترهای مدولاتور، ورودی و زمان نهایی

| Parameters | Case 1 | Case 2 | Case 3 |
|------------|--------|--------|--------|
| U_{on} | ۰٫۴ | ۰٫۸ | ۰٫۵ |
| U_{off} | ۰٫۲ | ۰٫۶ | ۰٫۲ |
| U_m | ۱ | ۱ | ۱ |
| K | ۲۰ | ۰٫۵ | ۱۰ |
| τ | ۰٫۲ | ۰٫۲ | ۰٫۲ |
| I_n | ۱ | ۲ | ۰٫۵ |
| t_f | ۲۰ | ۲۰ | ۲۰ |

- [3] Wie, B., *Space Vehicle Dynamics and Control*, AIAA Education Series, Reston, Virginia, 1998.
- [4] Anthony, T., Wei, B., and Carroll, S., "Pulse Modulated Control Synthesis for a Spacecraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 6, pp. 1014-1015, 1990.
- [5] McClelland, R. S., *Spacecraft Attitude Control System Performance Using Pulse-Width Pulse-Frequency Modulated Thrusters*, Master Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey CA, 1994.
- [6] Navabi, M. and Rangraz, H., "Comparing Optimum Operation of Pulse Width-Pulse Frequency and Pseudo-Rate Modulators in Spacecraft Attitude Control Subsystem Employing Thruster," *Recent Advances in Space Technologies (RAST)*, 2013, pp. 625-630.
- [7] Navabi, M. and Rangraz, H., "Comparing Optimum Operation of Pulse Width-Pulse Frequency and Pseudo-Rate Modulators Regarding Subsystem Life Duration in Control Subsystem Employing Thruster," *The 12th Conference of Iranian Aerospace Society*, 2013.
- [8] Hyland, D. C., Junkins, J. L., and Longman, R. W., "Active Control Technology for Large Space Structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, 1993, pp. 801-821.
- [9] Singhose, W., Biediger, E., Okada, H., and Matunaga, S., "Control of Flexible Satellites Using Analytic On-Off Thruster Commands," *In Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2003.
- [10] Santana, C., Martins, L. S., and Arantes, G., "Attitude Stabilization of the PMM Satellite Using a LQG-Based Control Strategy," *Trends in Applied and Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 2, 2008, pp. 321-330.
- [11] Wie, B. and Plescia, C. T., "Attitude Stabilization of Flexible Spacecraft During Station Keeping Maneuvers," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 4, 1984, pp. 430-436.
- [12] Mousavi, F., Roshanian, J., and Emami, M. R., "Hardware-in-the-Loop Simulation for Attitude Control of a Suborbital Module Using Cold Gas Thrusters," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, 2014, pp. 177-186 (in Persian).
- [13] Lian, Y. and Tang, G., "Libration Point Orbit Rendezvous Using PWPF Modulated Terminal Sliding Mode Control," *Advances in Space Research*, Vol. 52, No. 12, 2013, pp. 2156-2167.
- [14] Xu, X. and Cai, Y., "Pulse-Width Pulse-Frequency Based Optimal Controller Design for Kinetic Kill Vehicle Attitude Tracking Control," *Applied Mathematics*, Vol. 2, No. 5, 2011, pp. 565-574.
- [15] Topland, M. P., *Nonlinear Attitude Control of the Micro-Satellite ESEO*, M. Sc. Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2004.
- [16] Arantes, G., Martins-Filho, L. S., and Santana, A. C., "Optimal On-Off Attitude Control for the Brazilian Multi Mission Platform Satellite," *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2009, No. 1, 2009, pp. 1-17.
- [17] Buck, N. V., "Minimum Vibration Maneuvers Using Input Shaping and Pulse-Width Pulse-Frequency Modulated Thruster Control," Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 1996.



شکل ۳۸- درصد خطای رابطه تقریبی مصرف سوخت بر حسب مقدار تقریبی آن به ازای $t_{on}/t_1 = 0.5$ و $t_f/t_1 = 20$

پیوست ج: روابط تبدیل دو نمایش محدود مجاز

در منابع برای تعیین محدوده ترجیحی پارامترها به دو صورت عمل شده است که در اینجا روابط تبدیل آنها ذکر می‌شود. نمایش نخست به فرم زیر است:

$$\beta_1 u_{on} < h < \beta_2 u_{on}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < 1 \quad (62)$$

نامساوی فوق را می‌توان بر حسب نسبت آستانه خاموش شدن به آستانه روشن شدن نمایش داد:

$$1 - \beta_2 < u_{off}/u_{on} < 1 - \beta_1 \quad (63)$$

البته محدوده مذکور، به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$\alpha_1 u_{off} < h < \alpha_2 u_{off}, \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \quad (64)$$

نامساوی فوق را می‌توان بر حسب نسبت آستانه خاموش شدن به آستانه روشن شدن نمایش داد.

$$\frac{1}{1+\alpha_2} < \frac{u_{off}}{u_{on}} < \frac{1}{1+\alpha_1} \quad (65)$$

که در آن،

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2} \quad (66)$$

و یا

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{1-\beta_2} \quad (67)$$

البته روابط فوق، به ازای هر دو صورت باید و بی بعد برقرار است.

مراجع

- [1] Wertz, J. R., *Spacecraft Attitude Determination and Control*, D. Reidel Publishing Company, Massachusetts, 1978.
- [2] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- Acta Astronautica*, Vol. 64, No. 11, 2009, pp. 1085-1108.
- [23] Fazlyab, A., Ajorkar, A., and Kabgarian, M., "Design of an Adaptive Controller of a Satellite Using Thruster Actuator," *Journal of Computer Applications*, Vol. 102, No. 10, 2014, pp. 6-12.
- [24] Song, G., and Agrawal, B. N., "Vibration Suppression of Flexible Spacecraft During Attitude Control," *Acta Astronautica*, Vol. 49, No. 2, 2001, pp. 73-83.
- [25] Jalali-Naini, S. H., and Bohlouri, V., "Quasi-Normalized Analysis of Satellite Stabilization with Pulse-Width Pulse-Frequency Modulator in Presence of Noise," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 1, 2018, pp. 165-176 (in Persian).
- [26] Jalali-Naini, S. H. and Bohlouri, V., "Quasi-Normalized Static and Dynamic Analysis of Pulse-Width Pulse-Frequency Modulator in Presence of Input Noise," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, 2016, pp. 455-466 (in Persian).
- [18] Song, G., Buck, N. V., and Agrawal, B. N., "Spacecraft Vibration Reduction Using Pulse-Width Pulse-Frequency Modulated Input Shaper," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, 1999, pp. 433-440.
- [19] Krovel, T., *Optimal Tuning of PWPF Modulator for Attitude Control*, Master Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Spring 2005.
- [20] Jalali-Naini, S. H. and Ahmadi Darani, Sh., "Parametric Optimization of Spacecraft Attitude Control with Pulse-Width Pulse-Frequency Modulator Using Quasi-Normalized Equations," *the 13th Conference of Iranian Aerospace Society*, 2014.
- [21] Hu, Q. and Ma, G., "Variable Structure Control and Active Vibration Suppression of Flexible Spacecraft During Attitude Maneuver," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 9, No. 4, 2005, pp. 307-317.
- [22] Hu, Q., "Variable Structure Maneuvering Control with Time-Varying Sliding Surface and Active Vibration Damping of Flexible Spacecraft with Input Saturation,"