

# حل تحلیلی دینامیک نسبی تأثیر گرانشی فضاپیماها در مأموریت تغییر مسیر سیارک فضایی آپوفیس

جواد شمس<sup>۱\*</sup> و جعفر روشنی یان<sup>۲</sup>

۱ و ۲ - دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

\*تهران، کد پستی: ۱۶۵۹۶۳۱۷۸۶

Luftwaffe.jg52@gmail.com

در این مقاله، حل تحلیلی مأموریت تغییر مسیر جرم فضایی بالقوه خطرناکی که حیات بر روی کره زمین را با مخاطره روبه رو می‌سازد در مدارهایی با لحاظ اثر خروج از مرکز مورد بررسی قرار گرفته است. سیارک فضایی آپوفیس به عنوان نمونه بررسی در این تحقیق مورد مذاقه قرار گرفته همچنین از تکنولوژی پرواز آرایشمند نیز به دلیل مزایای آن استفاده شده است. روش‌های متفاوتی برای مأموریت تغییر مسیر این اجرام آسمانی پیشنهاد شده است که در این میان استفاده از تکنولوژی کشنده گرانشی کاربرد گسترده‌تری پیدا کرده است. روش حل کاملاً تحلیلی با به کارگیری سری فوریه برای حل مسئله بازآرایی در دینامیک حرکت نسبی استفاده شده است و همچنین نیاز به کارگیری کنترل فعال برای دستیابی به دقت بالاتر نیز با نمودارهای مربوطه بیان شده است. روش به کارگرفته شده کاملاً تحلیلی و عمومی بوده و هیچ محدودیتی برای استفاده ندارد و در تمامی مدارهای بیضوی با دقت بالا قابل به کارگیری است.

**واژه‌های کلیدی:** سیارک آپوفیس، تغییر مسیر سیارک فضایی، کشنده گرانشی، معادلات دینامیکی حرکت نسبی، پرواز آرایشمند فضاپیماها، مدارهای فضایی بیضوی

## علائم و اختصارات

$\theta$	آنومالی حقیقی مدار		
$\dot{\theta}$	نرخ زاویه‌ای مدار		
$\phi$	نصف زاویه مخروط گازهای خروجی	$a$	نیم محور اصلی
$\phi_{(\theta)}$	ماتریس انتقال حالت	$e$	خروج از مرکز مدار
$\rho$	فاصله بین فضاپیمای لیدر و پیشرو	$d$	فاصله معلق ماندن از سطح سیارک
$\Omega$	زاویه صعودی	$F_g$	کشش بین فضاپیما و سیارک
$\omega$	آرگومان حضیض	$F_{hover}$	نیروی پیشرانده در جهت سیارک
		$G$	ثابت جهانی گرانش
		$i$	زاویه میل مداری
		$L$	بزرگی گشتاور زاویه‌ای مداری لیدر
		$M_a$	جرم سیارک
		$R_a$	شعاع متوسط سیارک
		$T$	بردار پیشرانده

## مقدمه

سیارک‌ها، اخترواره‌هایی در منظومه شمسی داخلی هستند، شکل بزرگتر آن‌ها که خرده سیاره نیز نامیده می‌شود، به هرگونه شیء نجومی اطلاق می‌شود که حول خورشید چرخش می‌کنند و گردی یک سیاره را ندارند و الزماً دارای مشخصات یک ستاره دنباله‌دار فعال نیز نیستند ولی با کشف سیاره‌های خرد در سیستم منظومه شمسی بیرونی، کشف شد که سطوح بخار مانند آنها بیشتر به ستاره‌های دنباله‌دار مشابهت دارد و از سیارک‌های معمولی متفاوت

۱. کارشناسی ارشد (نویسنده مخاطب)  
۲. استاد

همگانی ناشی شود. این معادلات معمولاً به نام هیل<sup>۲</sup> [۳] شناخته شده‌اند.

لاودن<sup>۳</sup> [۴] اولین کسی بود که معادلات حرکت نسبی را شامل خروج از مرکز بیان کرد. پیشرفت‌های بعدی برای مدارات دور از مرکز خلاصه شده به وسیله اینالهان<sup>۴</sup> [۵] و دیگران، شامل تأثیرات خروج از مرکز مرتبه اول مدار مرجع در معادله‌های حرکت نسبی بود. در مرجع [۶] پیاده‌سازی ساختارهای پرواز آرایشی به طور نسبتاً مبسوطی مورد بررسی قرار گرفته است. مرجع [۷] انواع فرمول‌بندی‌های دینامیک حرکت نسبی اعم از خطی یا غیرخطی بودن و همچنین لحاظ و عدم لحاظ اثر خروج از مرکز مدار فضاپیمای لیدر را مطرح کرده است. در مرجع [۸] ماتریس مونودرومی و شرایط پربودیک بودن جواب معادلات دینامیک نسبی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات دینامیک حرکت نسبی که در حالت پایه و بدون در نظر گرفتن اثر خروج از مرکز است به معادلات هیل معروف است و معادله با لحاظ این اثر، معادلات شاونر-همپل<sup>۵</sup> نامیده می‌شود. مرجع [۹] حل تحلیلی برای مدارهای با بیضویت کم ارائه کرده است و در مراجع [۱۰-۱۱] حل تحلیلی برای این معادلات ارائه شده است. مرجع [۱۲] این روش را برای مسئله کنترل بهینه مصرف سوخت به کار برده است. در مرجع [۱۳] روشی تحلیلی بر منای سریه فوریه برای حل این معادلات برای مدارهای نزدیک زمین به کار برده شده است.

در مورد برخورد اجرام و زباله‌های فضایی، برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مراجع [۱۴ و ۱۵] رجوع کرد.

در این مقاله با به کارگیری ساختاری مشابه، حل تحلیلی این معادلات در مداری خورشید مرکز و با بیضویت نسبتاً بالا برای انجام مأموریت تغییر مسیر سیارک فضایی آپوفیس به کار گرفته شده و نتایج حاصله در قالب نمودارهای مربوطه ارائه شده‌اند.

همچنین در بخشی که در مورد بادبان خورشیدی برای انجام مأموریت محوله بحث شده، در مورد تعداد فضاپیمای مورد نیاز بحث و بررسی لازم صورت گرفته است.

در این تحقیق به حل تحلیلی مسئله مطروحه به صورت حل همگن و حل پسیو پرداخته شده است. از سوی دیگر به دلیل اغتشاشات فضایی موجود از قبیل تأثیر گرانشی اجرام آسمانی و بادهای خورشیدی و دیگر عوامل اغتشاشی مضر مؤثر بر روی ساختار معادلات حرکت نسبی، نیاز به کنترل‌های فعال برای حصول دقت بالاتر مورد نیاز احساس می‌شود که در بخش پایانی تحقیق با نمایش نمودارهایی، نحوه تأثیر عوامل اغتشاشی و لزوم به کارگیری کنترل فعال نشان داده شده است.

هستند. بنابراین واژه سیارک معمولاً به اجرام کوچک منظومه شمسی داخلی تا محدوده بیرون از مدار مشتری اطلاق می‌شود. ستاره‌های دنباله‌دار معمولاً در سیستم منظومه خورشیدی داخلی و بین مدارهای مشتری و مریخ تشکیل می‌شوند. علاقه علمی به ستاره‌های دنباله‌دار و سیارک‌ها بیشتر به خاطر حالت آنهاست زیرا گرد و غبارهای بدون تغییر باقی‌مانده از روند تشکیل منظومه شمسی به حدود ۴۶ میلیارد سال قبل بر می‌گردند. سیاره‌های بزرگ‌تر دیگر (مشتری، اورانوس، نپتون و زحل) از انباشتگی میلیاردها ستاره دنباله‌دار تولید شدند و ذرات باقی‌مانده از روند تشکیل آنها همان ستاره‌های دنباله‌داری است که امروزه می‌بینیم. در مقابل، سیارک‌ها همان باقی‌مانده تشکیل سیاره‌های درونی مانند مریخ، ونوس، زمین و عطارد هستند.

بلوک‌های باقی‌مانده از روند تشکیل منظومه شمسی، ستاره‌های دنباله‌دار و سیارک‌ها، نشانه‌ای از ساختار شیمیایی است که سیاره‌ها حدود ۴۶ میلیارد سال پیش از خود به جا گذاشته‌اند. اگر بخواهیم ترکیب عناصر اصلی تشکیل‌دهنده سیارات را بدانیم، باید ترکیب شیمیایی غبارهای به جا مانده از روند تولید، یعنی ستاره‌های دنباله‌دار و سیارک‌ها را تعیین کنیم.

گرچه روند اصلی تشکیل زمین هنوز هم شناخته شده نیست، مبدأ حیات نیاز به مولکول‌های کربنی، آب مایع و منبع انرژی دارد. از آنجا که برخی اشیای نزدیک به زمین شامل مولکول‌های کربنی و یخ آبی هستند، برخورد این اشیا با زمین می‌تواند عامل مهمی برای تغییر بیولوژیکی و جغرافیایی باشد.

یک میلیارد سال بعد از تشکیل زمین، ادامه حیات با برخورد سیارک‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار متوقف شد زیرا سطح زمین به حرارتی رسید که از امکان وجود مقدار کافی آب و مولکول‌های کربنی جلوگیری شد. حیات روی زمین در انتهای دوره‌ای آغاز شد که بمباران سنگین آخر نامیده می‌شود، یعنی ۳۸ میلیارد سال پیش [۱].

بر اساس یک مبنای روزانه، حدود صدها تن از مواد سیاراتی به سطح زمین فرود می‌آید. آن‌ها به دسته‌های قنطورس خارجی، نپتون تروجان و اجرام نپتونی تقسیم می‌شوند و خرده سیاره نامیده می‌شوند. در این مقاله سیارک به سیاره‌های خرد در سیستم منظومه شمسی داخلی اطلاق می‌شود [۲].

در سال‌های اخیر توجه و رویکرد به کارگیری از فناوری پرواز آرایشی فضاپیمای با سرعت شتابنده‌ای رو به افزایش است. زیربنای اصلی این فناوری مبتنی بر دینامیک حرکت نسبی است که در طول سالیان در مراجع مختلف پیاده‌سازی و فرمول‌های متفاوت با لحاظ فرضیات مختلف و روش‌های حل آن‌ها بیان شده است.

طراحی پرواز آرایشمند فضاپیمای می‌تواند از معادله‌های طولی حرکت نسبی برای دو هدف تحت تأثیر یک میدان گرانشی نقطه

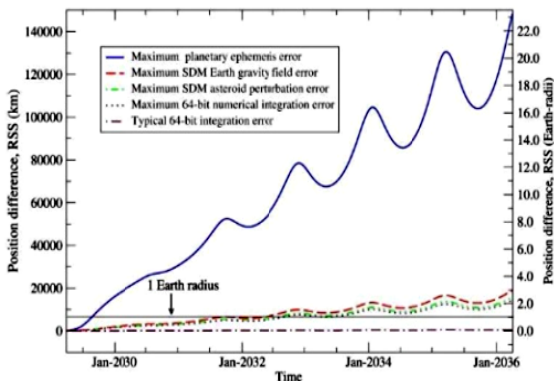
2. Hill  
3. Lawden  
4. Inalhan  
5. Tschauner-Hempel

مدارهای آنها با دسترسی به مشاهدات جدید، می‌توانیم آمار مجاورت آنها و در نتیجه خطر برخورد به زمین را بهتر پیش بینی کنیم.

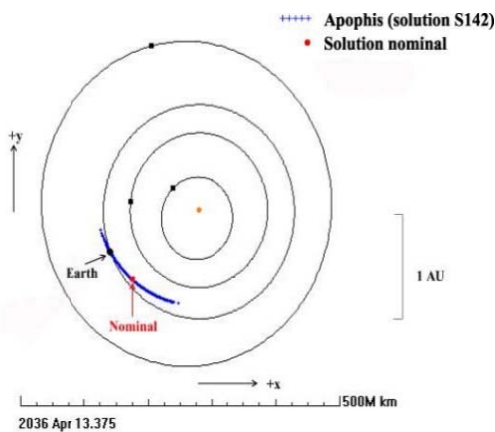
**جدول ۱ - پارامترهای مداری و مشخصات فیزیکی سیارک فضایی آپوفیس**

1.098505744 AU	نقطه اوج مداری
0.746058621 AU	نقطه حضیض مداری
0.9222821826 AU	نیم محور بزرگ بیضی
0.1910733664	خروج از مرکز
323.5148011 day	پریود مداری
30.728 km/s	متوسط سرعت مداری
150.996453°	آنومالی متوسط
3.3312800°	زاویه میل مداری
204.45743°	زاویه صعودی
~0.52 km/h	سرعت فرار
<b>مشخصات فیزیکی</b>	
325±15 m	ابعاد
4×10 <sup>10</sup> kg	جرم
270 K	درجه حرارت

Apophis Trajectory Sensitivity (2006-2036)



**شکل ۱ -** اغتشاشات و پیش‌بینی عدم قطعیت‌ها در مورد آپوفیس مابین سال‌های ۲۰۲۹-۲۰۳۶ [۱۶]



**شکل ۲ -** عدم قطعیت در مسیر پیش‌بینی شده آپوفیس نسبت به خورشید [۱۶]

در این مقاله در ابتدا معرفی و بیان مشخصات مداری و فیزیکی سیارک فضایی آپوفیس که در این تحقیق به عنوان مورد بررسی انتخاب گردیده پرداخته شده است. در ادامه چند نمونه از روش‌ها و متدهای انحراف اجرام آسمانی تهدیدکننده حیات بر روی کره زمین معرفی شده‌اند و از آن میان روش کشنده گرانشی منتخب شده و روابط مربوطه ارائه شده است. نکته حایز اهمیت در اینجا این است که چون روش کشنده گرانشی از تداخل نیروی گرانشی بین سیترک و فضاپیما استفاده می‌کند محدودیت فیزیکی و تکنولوژیکی خاصی ندارد. در قسمت بعد دینامیک حرکت نسبی در مدارهای دایروی و بیضوی در حالت خطی و غیرخطی معرفی شده است که جامعیت معرفی این بخش را در پی دارد. در ادامه برای مدارهای بیضوی فرمول‌های مرتبط بیان شده و روابط مورد نیاز معرفی شده است. در ادامه لزوم پرداختن به راستای خارج از صفحه به عنوان پارادایمی مؤثر و تأثیرگذار با ذکر ادله بیان شده است. در قسمت بعد حل همگن مسئله با توضیحات و نمودارهای مربوطه بیان شده است و در انتها نیاز به به‌کارگیری کنترلر در این مأموریت خاص با نمودارهای مرتبط مورد بررسی قرار گرفته است. در این جا نیز ذکر این نکته حایز اهمیت است که روش به کار گرفته شده برای حل همگن مسئله کاملاً تحلیلی بوده و هیچ محدودیت تکنیکی خاصی برای به کار گیری ندارد و در تمامی مدارهای فضایی بیضوی قابل پیاده‌سازی بوده و دقت نتایج حاصله بالایی را نیز به همراه دارد.

**مروری بر سیارک فضایی "۹۹۹۴۲" آپوفیس**

سیارک آپوفیس<sup>۶</sup> که قبلاً با نام موقت 2004 MN4 شناخته می‌شد در ۱۹ ژوئن ۲۰۰۴ کشف شد. این یک سیارک نزدیک به زمین با قطر ۳۲۰ متری است که احتمال می‌رود در سال ۲۰۲۹ و با احتمال ۱ به ۴۵۰۰۰ به زمین بسیار نزدیک شود و بر اثر تشدید مداری در سال ۲۰۳۶ باعث برخورد آن به زمین شود. آپوفیس یک سیارک از رده آتن<sup>۷</sup> است و محور نیمه اصلی مداری آن کمتر از 1AU است و جرم آن حدود  $4 \times 10^{10} \text{ Kg}$  برآورد شده است.

دوره چرخشی آن حدود ۳۲۳ روز دور خورشید است. بعد از پرواز نزدیک آن در سال ۲۰۲۹ بر فراز زمین تبدیل به یک سیارک از نوع آپولو<sup>۸</sup> خواهد شد. قبلاً پیش‌بینی شد که آپوفیس در ۱۳ آوریل ۲۰۲۹ از حدود ۳۶۳۵۰ کیلومتری سطح زمین عبور خواهد کرد که کمی بالاتر از ارتفاع ۳۵۷۸۶ کیلومتری ماهواره‌های ژئوسنکرون است. پتانسیل ایجاد نزدیکی به زمین بدین معنا نیست که یک سیارک بالقوه خطرناک به زمین برخورد خواهد کرد. با نمایش این گونه از سیارک‌ها و به‌روزرسانی

6. Apophis  
7. Aten  
8. Apolo

## انحراف سیارک فضایی

در این بخش متدها و روش‌های مطرح شده برای انجام ماموریت تغییر مسیر اجرام فضایی بالقوه خطرناک مورد اشاره و بررسی قرار گرفته و از آن میان روش استفاده از کشنده گرانشی به دلیل سهولت در استفاده و کارایی مؤثر مورد انتخاب واقع شده است.

در طول سالیان اخیر، سناریوی محتمل برخورد یک سیارک تهدید کننده به زمین همواره در میان دانشمندان تبدیل به یک بحث حساس در مورد روش‌های انحراف شده است. اجرام سماوی کوچک مانند اجرام نزدیک به زمین (NEO) تبدیل به یک عنوان رایج در مطالعه شده‌اند زیرا اهمیت زیادی در برداشتن رازهای تشکیل، تکامل و ترکیب منظومه شمسی دارند [۱۷].

در میان تمام اشیاء فضایی، NEOها دارای اهمیت بیشتری هستند زیرا دسته‌ای از اجرام سماوی هستند که احتمال برخورد آنها با زمین بیشتر است و در بسیاری موارد می‌توانند در مسیر ساده تری نسبت به مسیر ماه- زمین به زمین برسند و اینکه برای زمین خطر و چالشی مهم محسوب می‌شوند.

در این بخش، شش استراتژی انحراف را معرفی می‌شود:

- کالکتور خورشیدی
- رهگیری کننده هسته‌ای
- برخورد جنبشی
- تراست کم
- محرک جرم
- یدک کشی گرانشی

برای مطالعه کارایی هر یک از این استراتژی‌ها یک مجموعه از مدل‌های ریاضی برای محاسبه تغییرات مومنتوم خطی NEO، در اثر هر یک از روش‌های انحراف، ایجاد شده است. عمل انحراف بخشی توسط برخورد جنبشی و رهگیری کننده هسته‌ای به صورت تغییرات مومنتومی سرعت اشیا نزدیک به زمین مدلسازی شده و سایر استراتژی‌ها به صورت تغییرات پیوسته از مومنتوم خطی مدلسازی می‌شوند.

تاثیر محرک جرم نیز به صورت یک توالی از ضربه‌ها مدل سازی شده و در نتیجه تغییرات گسسته مومنتوم خطی سیارک را در نظر می‌گیرد. فرض می‌شود که جهت ضربه انحراف برای برخوردکننده‌های جنبشی و رهگیری کننده هسته‌ای تنها با مسیر انتقال از زمین به سیارک بستگی دارد و در جهت بردار سرعت مربوطه بین فضاپیما و سیارک در انتهای انتقال قرار دارد. در تمام سایر استراتژی‌ها، جهت عمل انحراف غیروابسته به انتقال است

[۱۸].

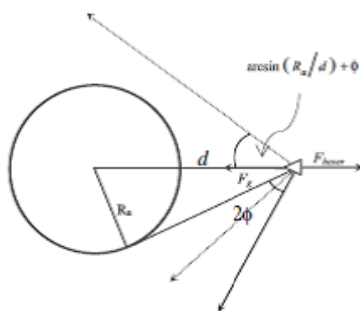
## کشنده گرانشی

دستگاه گرانشی از جذب گرانشی بین یک سیارک و یک فضاپیما برای خارج کردن سیارک از مسیر برخورد با زمین بهره می‌گیرد. برای ایجاد انحراف در مسیر سیارک به شیوه مطلوب، فضاپیما باید موقعیت شناور خود را در طول مدت کشش حفظ کند. این جنبه توسط لو و لاو (Luv and lu) به عنوان ابزاری برای اصلاح مدار یک سیارک پیشنهاد شده است [۱۹].

ویژگی و نکته مثبت به کارگیری این تکنیک در انجام ماموریت محوله از این قرار است که چون در این روش از تداخل نیروی گرانشی مؤثر بین سیارک فضایی و فضاپیما استفاده می‌گردد و فضاپیما در حالت هاور و شناور در همسایگی سیارک فضایی قرار می‌گیرد نتیجتاً محدودیت فیزیکی و تکنیکی خاصی برای انجام ماموریت مشروحه پیش روی طراحان ماموریت قرار ندارد.

فرضیه‌های زیر برای توسعه مدل ریاضی برای کشنده گرانشی به کار برده می‌شوند:

۱. زیرسیستم قدرت ۵۰ درصد جرم خشک md را تشکیل می‌دهد.
  ۲. زیر سیستم قدرت قادر به تامین  $40 \text{ W/Kg}$  است.
  ۳. زیر سیستم پیشرانده‌ای حدود  $0.034 \text{ N/kW}$  تولید می‌کند.
- پیشرانده کلی فضاپیما  $T_n$  محاسبه می‌شود. هرچه فضاپیما نزدیک‌تر به سطح سیارک پرواز کند کشش گرانشی بیشتر خواهد بود. با این حال، گازها نباید بر سطح سیارک برخورد داشته باشند در غیراین صورت مرکز جرم سیستم NEO فضاپیما ثابت باقی می‌ماند. در واقع جریان جرمی خارج شده از سیستم است که تغییری در مومنتوم خطی ایجاد می‌کند. توجه کنید که با توجه به قانون کنش و واکنش، استفاده از حجم معلومی پیشرانده برای هل دادن سیارک با استفاده از همان پیشرانده برای شناور ماندن بر سطح آن منجر به برخی تغییرات در مومنتوم خطی و در نتیجه ایجاد همان میزان انحراف خواهد شد. از سوی دیگر، پیشرانده‌ها نباید با سطح سیارک برخوردی داشته باشند (شکل ۳) در نتیجه پیشرانده عمودی مؤثر  $F_{hover}$  همواره کوچکتر از پیشرانده کل  $T_n$  خواهد بود.



شکل ۳- دیاگرام هندسی کشش گرانشی و ساختار سیارک

مختلف و پوشش مناسب برای ارتباطات و تجسس بهره خواهند برد) مثلاً روش‌های ترکیبی برای نقشه برداری از زمین). در سال‌های اخیر، تمایل بیشتری به استفاده از پروازهای گروهی ماهواره‌ها ایجاد شده است. چندین مأموریت از پرواز گروهی به عنوان وسیله‌ای برای کاهش هزینه و افزایش انعطاف پذیری برنامه‌های فضایی استفاده کرده اند. برنامه ریزان مأموریت امید دارند که اندازه و پیچیدگی مأموریت‌های پرواز فضایی‌ها را با چندین ماهواره کوچک و کم هزینه و ساده جایگزین کنند.

پرواز چندین ماهواره در این آرایش، باعث ایجاد انعطاف پذیری برای طراحان است زیرا هر ماهواره می‌تواند با توجه به ماهواره‌های دیگر موقعیت‌دهی کنند تا مأموریت‌های مختلف انجام دهند. برای مثال یک حسگر فضایی برای مشاهده زمین می‌تواند برای افزایش میدان دید خود از چندین ماهواره استفاده کند به جای اینکه بخواهد یک ماهواره بزرگ داشته باشد. سیستم به دلیل گروهی بودن، اندازه دید و قابلیت تنظیم روی مدار، انعطاف پذیر است.

مسئله دینامیک نسبی دارای چندین نوع مدل سازی دینامیکی مسئله است که متداول ترین و ساده ترین آن معادلات هیل-کلوهمسی- ویلتشر (Hill-Clohessy-Wiltshire) است.

یک آرایش مطلوب خاص، مدار نسبی است که وقتی به روی صفحه افقی موضعی تصویر می‌شود، به صورت مدور و دایره وار است. این راه حل، یک راه حل دقیق برای معادلات هیل-کلوهمسی- ویلتشر (HCW) است که دینامیک حرکت نسبی مدار مرجع مدور، زمین کروی و شتاب جاذبه دیفرانسیلی خطی شده را مدل سازی می‌کند [۶].

غیرخطی بودن شتاب جاذبه دیفرانسیلی، بیضوی بودن مدار مرجع و عدم کرویت کره زمین مهم‌ترین اختلالاتی هستند که راه حل‌های مدار مدور مربوط به معادلات HCW را می‌شکنند و تفکیک می‌کنند.

معادلات حرکت نسبی با مفروضات متفاوت به فرم‌های زیر می‌باشند:

۱- فرم معادلات هیل که با فرض مدار کپلری بدون در نظر گرفتن اثر خروج از مرکز می‌باشد [۷]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} + n^2z &= 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

۲- معادلات حرکت نسبی غیر خطی با در نظر گرفتن بیضویت مدار [۷]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \dot{\theta}^2y - \dot{\theta}^2x &= \\ -\frac{\mu(r_c + x)}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\mu}{r_c^2} & \end{aligned} \quad (۷)$$

همان طور که اشاره شد، پیشرانها باید با زاویه  $\phi$ ، برابر با نصف زاویه مخروطی گازهای خروجی قرار گیرند تا از برخورد گازهای احتراق جلوگیری شود. با این تنظیمات، فاصله پرواز با حل سیستم معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} F_{hover} &= T_n \cos(\arcsin(\frac{R_a}{d}) + \phi) \\ F_g &= \frac{GM_a m_i}{d^2} \quad F_{hover} = F_g \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن  $F_g$  کشش گرانشی بین فضاپیما و سیارک می‌باشد،  $F_{hover}$  نیروی پیشران‌های در جهت سیارک،  $\phi$  ۲۰ درجه (طبق Lu and Love) شعاع متوسط سیارک و  $G$  ثابت گرانشی جهانی است،  $M_a$  جرم سیارک،  $m$  جرم فضاپیما در آغاز مانور کشش و  $d$  فاصله معلق ماندن می‌باشد که قابل محاسبه است و باعث کارایی گزینه ارتفاع ثابت نسبت به گزینه ارتفاع متغیر می‌شود.

اگر گزینه ارتفاع ثابت به کار گرفته شود جرم فضاپیما در هر زمان  $t$  در طول مانور کشش می‌تواند با فرض مصرف خطی جرم نسبت به عمل کشش  $F_{hover}$  محاسبه شود:

$$m(t) = m_i e^{-\left(\frac{GM_a(t-t_0)}{d^2 \cos(\arcsin(R_a/d) + \phi) I_{sp} g_0}\right)} \quad (۲)$$

شتاب موثر روی سیارک عبارت است از:

$$a_{gtug}(t) = \frac{Gm(t)}{d^2} \quad (۳)$$

بنابراین جرم باقی مانده در انتهای یک مانور کشش با مدت  $\Delta t_{ng}$  به صورت زیر است:

$$m_d = m_i e^{-\left(\frac{GM_a \Delta t_{ng}}{d^2 \cos(\arcsin(R_a/d) + \phi) I_{sp} g_0}\right)} \quad (۴)$$

و با استفاده از معادله (۴) در سیستم معادلات (۱) داریم:

$$\left[ \left( m_i e^{-\left(\frac{GM_a \Delta t_{ng}}{d^2 \cos(\arcsin(R_a/d) + \phi) I_{sp} g_0}\right)} \right) / 2 \right] \frac{g}{\tau} \quad (۵)$$

$$\cos(\arcsin(\frac{R_a}{d}) + \phi) - \frac{GM_a m_i}{d^2} = 0$$

که برای یافتن فاصله شناوری  $d$  باید متناظر با هندسه مساله مورد استفاده حل شود.

## معادلات دینامیک نسبی پرواز آرایشمند

پرواز آرایشمند یک تکنولوژی محوری برای کاربردهای مداری و فضایی است که شامل فضاپیماهای متعددی است. برخی کاربردهای فضایی آینده از تکنولوژی‌های پرواز گروهی برای انجام مشاهدات

که مداری بیضوی و خورشید مرکز می‌باشد فلذا با این مفروضات، خود سیارک آپوفیس مرجعی مجازی به عنوان لیدر و پیشرو محسوب شده و فضاپیمای کشنده گرانشی به عنوان فضاپیمای پیرو لحاظ می‌گردد.

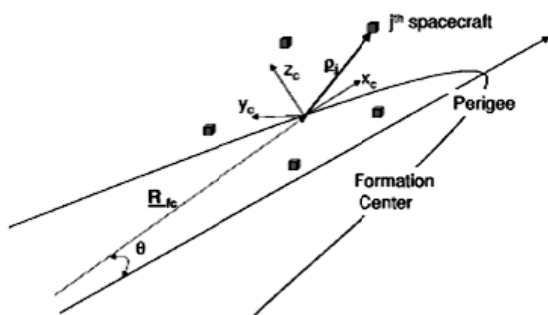
همچنین برای توضیحات بیشتر می‌توان به [20-22] مراجعه کرد.

### بیان دینامیک حرکت نسبی در مدار بیضوی

در این بخش، مؤلفه‌های دینامیکی نسبی را برای یک مدار بیضی نشان داده می‌شود. چون که فضاپیماها در مدار بیضیوی حرکت می‌کنند، باید از معادلات شاونر- همپل (Tschauner-Hempel) به جای معادلات هیل استفاده شود. این معادلات که ابتدا توسط شاونر- همپل ارائه شدند به این صورت هستند که [13]:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{\rho(\theta)^3}{\Gamma^4} \begin{bmatrix} 2x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

که در آن محور  $x(t)$  در جهت شعاعی قرار دارد. محور  $y(t)$  در جهت مسیر و راستای  $z(t)$  در طول بردار گشتاور زاویه‌ای مدار یک سیستم راستگرد را کامل می‌کند (شکل ۵). در حالی که  $(\cdot)$  نشان‌دهنده مشتق براساس زمان  $(t)$  است.  $\rho(\theta) = 1 + e \cos \theta$  و  $\Gamma = L^{3/2} G / M$  تعریف می‌شوند که در آن  $L = R^2 \dot{\theta}$  بزرگی گشتاور زاویه‌ای مداری ماهواره اصلی است.  $G$  ثابت گرانش و  $M$  جرم است.

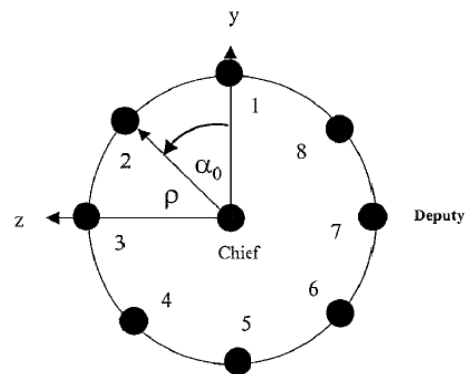


شکل ۵- حرکت نسبی در مختصات مرجع [۵]

$$\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2 y = -\frac{\mu y}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (8)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (9)$$

$$\dot{r}_c = r_c \dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c} \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}_c \dot{\theta}}{r_c} \quad (10)$$



شکل ۴- نمایش لحظه‌ای آرایش در نقطه حضیض مدار لیدر [۷]

۳- معادلات حرکت نسبی غیر خطی بدون در نظر گرفتن بیضویت مدار [۷]

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = -\frac{\mu(a_c + x)}{[(a_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\mu}{a_c^2} \quad (11)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = -\frac{\mu y}{[(a_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (12)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu z}{[(a_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (13)$$

۴- دینامیک نسبی خطی‌سازی شده با در نظر گرفتن اثر بیضویت [۷]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2 x - 2(\mu/r_c^3)x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2 y + (\mu/r_c^2)y &= 0 \\ \ddot{z} + (\mu/r_c^3)z &= 0 \\ \dot{r}_c &= r_c \dot{\theta}^2 - \mu/r_c^2 \\ \ddot{\theta} &= -(2\dot{r}_c \dot{\theta}/r_c) \end{aligned} \quad (14)$$

لازم به ذکر است که معادلات بالا را معادلات شاونر- همپل (Tschauner-Hempel) می‌نامند که در این مقاله از این معادلات بهره جسته شده است. همچنین لازم به ذکر است که در این مقاله مدار حرکت سیارک آپوفیس به عنوان مدار مرجع و مبنا لحاظ شده

$$\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{z}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_z \quad (21)$$

باید به این نکته اشاره کرد که مکان حقیقی  $(x, y, z)$  و سرعت حقیقی  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  در ارتباط با مکان طیفی  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  و سرعت طیفی  $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$  به صورت زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} = \frac{\Gamma}{\rho(\theta)} \begin{bmatrix} \tilde{x}(\theta) \\ \tilde{y}(\theta) \\ \tilde{z}(\theta) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} = \frac{e \sin \theta}{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{x}(\theta) \\ \tilde{y}(\theta) \\ \tilde{z}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{\rho(\theta)}{\Gamma} \begin{bmatrix} \tilde{x}'(\theta) \\ \tilde{y}'(\theta) \\ \tilde{z}'(\theta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(\theta) \\ \tilde{y}(\theta) \\ \tilde{z}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{\rho(\theta)}{\Gamma} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}'(\theta) \\ \tilde{y}'(\theta) \\ \tilde{z}'(\theta) \end{bmatrix} = \frac{-e \sin \theta}{\Gamma} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} + \frac{\Gamma}{\rho(\theta)} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \\ z(\theta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

### استدلال لزوم پرداختن به راستای Z خارج صفحه

استفاده از راستای Z (که در راستای مومتوم زاویه‌ای است) و تعمیق مباحث در این راستا بر مبنای مستدلی استوار گشته است که در ادامه بیان گردیده است.

به عبارتی استفاده از راستای Z از دو منظر قابل پیاده سازی و بیان است و به خوبی می‌تواند بیان‌گر ساختار فکری و آنالیزهای موجود باشد. از طرف دیگر بر اساس مرجع [۲۳] قابل مشاهده است که مرتبه جابه‌جایی و سرعت در این راستا ۱۰ برابر نسبت به راستای Y و ۱۰۰ برابر نسبت به راستای X کوچکتر است لذا در این راستا می‌توان این نتیجه‌گیری را انجام داد که انرژی سیارک فضایی مورد نظر در این مقاله (آپوفیس) در این راستا کمتر است. استفاده از منظر انرژی و مفاهیم مینیم تلاش کنترلی و مینیمم مصرف سوخت، راهگشا خواهد بود و بر اساس این استدلال علمی، می‌توان به بررسی راستای (Z) پرداخت و بیان نمود که این راستا (Z) برای انجام مأموریت مشروحه کار آمد خواهد بود.

تغییر متغیر مستقل از زمان  $(t)$  به آنومالی حقیقی  $(\theta)$  معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+2/\rho & -2\rho'/\rho & 2\rho'/\rho & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\rho'/\rho & -2 & 1-1/\rho & -2\rho'/\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix} + \frac{\Gamma^4}{\rho^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/\rho & -2\rho'/\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z' \end{bmatrix} + \frac{\Gamma^4}{\rho^4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T_z \quad (17)$$

که در آن  $(\cdot)$  نشان دهنده تمایز بر اساس آنومالی حقیقی و بردار پیشرانه  $T = [T_x(t), T_y(t), T_z(t)]$  و بردار حالت  $[x(\theta), y(\theta), z(\theta)]^T$  بر اساس آنومالی حقیقی  $\Gamma, e, \rho$  و  $\rho' = -e \sin \theta$  توصیف می‌شود. آنومالی حقیقی  $(\theta)$  به راحتی با استفاده از معادله کیپلر محاسبه می‌شود. حرکت درون صفحه  $(x(\theta), y(\theta))$  و خارج از صفحه  $z(\theta)$  از هم مجزا می‌شوند. تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$[\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^T = \omega^{1/2} [x, y, z]^T \quad (18)$$

$$u(\theta) = [u_x(\theta), u_y(\theta), u_z(\theta)]^T = [T_x(\theta), T_y(\theta), T_z(\theta)]^T / \omega^{3/2} \quad (19)$$

که در آن  $\omega \equiv \dot{\theta}$  نرخ زاویه ای مداری فضاپیما پیشرو است. با فرآیند ارایه شده توسط کارتر<sup>۹</sup> و هومی<sup>۱۰</sup> معادلات به شکل ساده شده زیر تبدیل می‌شوند [۱۰ و ۱۱]:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/\rho & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (20)$$

بالای آپوفیس قرار گرفته است، در بازه زمانی ۵ ساله قادر است به اندازه ۳۰ کیلومتر مدار فضایی نامی آپوفیس را منحرف کند. انحراف‌های مداری بزرگ‌تر قاعداً نیازمند فضایی‌هایی با ابعاد و جرم بزرگ‌تر دارند که فعلاً در افق در دسترس تکنولوژی بادبان‌های خورشیدی نیست. در نتیجه پیشنهاد می‌شود که به جای استفاده از فضایی‌های بزرگ‌تر، با بهره‌گیری از فناوری پرواز آرایشمند و تعداد بیشتری از بادبان‌های خورشیدی مأموریت محوله را به انجام رسانید. می‌دانیم که کشنده‌های گرانشی از کوپل گرانشی برای مغشوش کردن مدار یک سیارک استفاده می‌کنند. تداخل گرانشی بین سیارک و فضایی‌ها شتاب وارده به سیارک را تعیین می‌کند. بر طبق مرجع [۲۴] شش بادبان خورشیدی به ابعاد  $100 \times 100$  متر که در مدار جابه‌جا شده در همسایگی سیارک آپوفیس به شعاع مداری یکنواخت ۲۰۰ متر توزیع شده اند، قادر خواهند بود که در بازه زمانی ۵ سال انحرافی به میزان ۹۵۶ کیلومتر و تغییر سرعتی به میزان ۲.۴۵۳ میلی‌متر بر ثانیه بشوند که برای اجرای مأمورین مطرحه مناسب است.

## راه حل‌های مؤلفه‌های دینامیک نسبی مداری در یک مدار بیضوی

در این قسمت راه حل‌های دینامیک نسبی مداری در مدار بیضوی در راستای مانور خارج از صفحه (راستای Z) بیان شده است:

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}(\theta) \\ \tilde{z}'(\theta) \end{bmatrix} = \Phi_z(\theta) \Phi_z^{-1}(\theta_0) \begin{bmatrix} \tilde{z}(\theta_0) \\ \tilde{z}'(\theta_0) \end{bmatrix} + \Phi_z(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} \Phi_z^{-1}(\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_z(\tau) d\tau \quad (26)$$

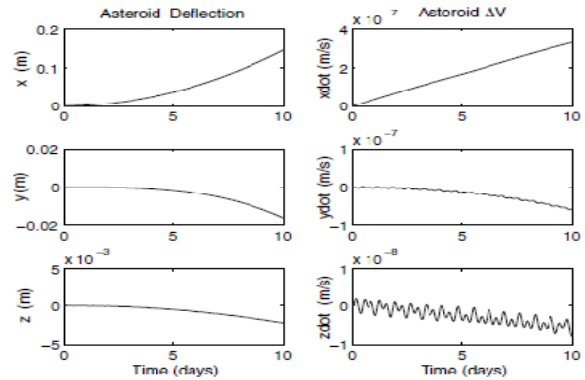
که در آن  $\Phi_z(\theta)$  یک ماتریس در ارتباط با  $A_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $\Phi_z(\theta) \Phi_z^{-1}(\theta_0)$  ماتریس انتقال حالت مرتبط با  $A_z(\theta)$  است.  $\theta_0$  آنومالی حقیقی است وقتی که پیش‌ران شروع به فعالیت می‌کند و  $\tau$  به عنوان متغیر انتگرال‌گیری به کار می‌رود. اولین عبارت در معادله (۲۶) راه حل همگن است در حالی که دومی راه حل خصوصی هست که شامل ترم پیش‌ران  $u_z$  است.

$$\Phi_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Phi_z^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

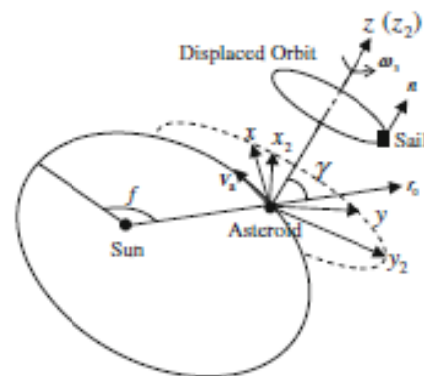
پس راه حل همگن برای معادله (۲۱) به فرم زیر است:

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{z}}(\theta) \\ \hat{\tilde{z}}'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta_0) & \sin(\theta - \theta_0) \\ -\sin(\theta - \theta_0) & \cos(\theta - \theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tilde{z}}(\theta_0) \\ \hat{\tilde{z}}'(\theta_0) \end{bmatrix} \quad (29)$$



شکل ۶- مقایسه مرتبه تغییرات جابه‌جایی و سرعت در راستای ۳ گانه  $X, Y, Z$  [۸]

چنانچه بحث شد، شکل (۶) بیانگر مفاهیم ارائه شده و تأییدی بر صحت استدلال صورت گرفته خواهد بود. همچنین چنانچه بخواهیم از منظر دیگری بر استفاده از محور Z بپردازیم، می‌توان به روش‌های مرسوم جهت منحرف کردن سیارک فضایی (آپوفیس) پرداخت. برای نمونه، چنان که در مرجع [۲۴] بحث شده است استفاده از بادبان خورشیدی پیشنهاد شده است. برای شکل (۷) می‌توان مشاهده کرد که عملکرد بادبان خورشیدی که جهت منحرف کردن سیارک فضایی به کار برده شده است، دارای عملکردی در راستای Z مختصات قرار گرفته بر روی سیارک فضایی است (به شکل ۷ توجه شود).

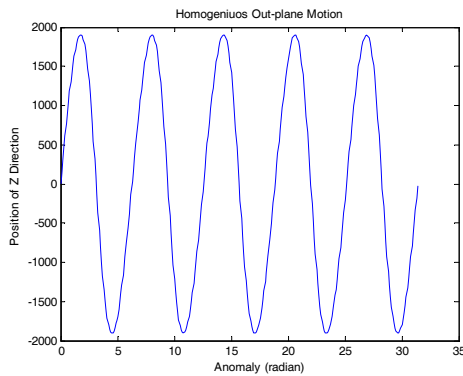


شکل ۷- بادبان خورشیدی قرار گرفته در مدار جابه‌جا شده در مجاورت سیارک فضایی [۲۴]

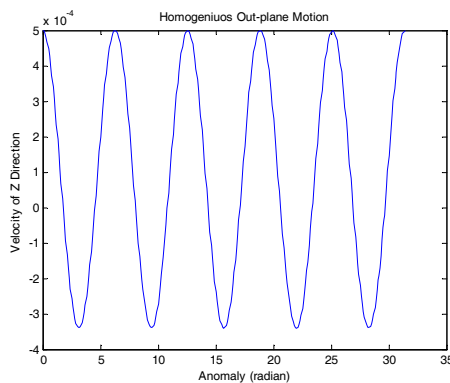
براساس مطالب مستدل بیان شده می‌توان به این نتیجه‌گیری رسید که راستای حرکتی مأموریت در نظر گرفته شده در این مقاله، بررسی و آنالیز راستای حرکتی Z، اهمیت ویژه‌ای دارد. بر طبق مرجع [۲۴] یک کشنده گرانشی بادبان خورشیدی به جرم ۲۵۰۰ کیلوگرم و ابعاد  $90 \times 90$  متر که در ارتفاع ۳۴۰ متری در



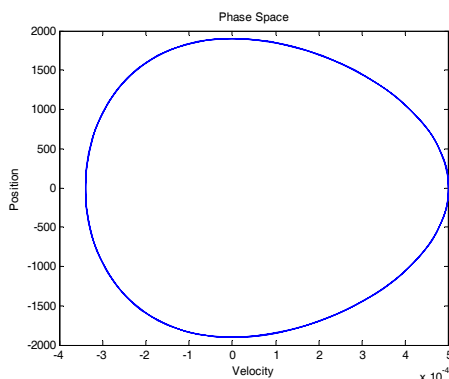
در نمودار متغییر سرعت در راستای خارج صفحه نیز چون مشتق متغییر موقیت می‌باشد، مطابق انتظار با پاسخی نوسانی و پرپودیک رو به رو هستیم و استدلال‌های مطرح شده در مورد موقعیت در مورد سرعت در راستای خارج از صفحه نیز صادق است. همچنین لازم به ذکر است که هرگاه تغییرات متغیری بر حسب مشتق آن رسم شود نمودار صفحه فاز به دست می‌آید. در ادامه نمودار صفحه فاز تغییرات راستای حرکت خارج صفحه بر حسب متغییر سرعت خارج از صفحه رسم گردیده و از آن نتایجی تحلیلی استخراج می‌گردد که به ذکر آن‌ها پرداخته شده است.



شکل ۸- تغییر مکان جهت Z به عنوان تابع آنومالی حقیقی (حل همگن)



شکل ۹- سرعت جهت Z به عنوان تابع آنومالی حقیقی (حل همگن)



شکل ۱۰- صفحه فاز راستای Z

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}(\theta) \\ \dot{\hat{z}}'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta - \theta_0) + e \cos \theta}{1 + e \cos \theta} & \Gamma^2 \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{(1 + e \cos \theta)(1 + e \cos \theta_0)} \\ -\frac{1}{\Gamma^2} [\sin(\theta - \theta_0) + e(\sin \theta - \sin \theta_0)] & \frac{\cos(\theta - \theta_0) + e \cos \theta_0}{1 + e \cos \theta_0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z(\theta_0) \\ \dot{z}(\theta_0) \end{bmatrix} \quad (30)$$

که در آن از علامت "۸" برای نشان‌دهنده وضعیت در فقدان پیشرانه بهره برده شده است. تفاوت بین وضعیت حقیقی  $(z)$  و شبه حالت  $(\bar{z}, \bar{z}'(\theta_0), z'(\theta_0))$  باید از مقادیر حقیقی  $z(\theta_0)$  و  $\dot{z}(\theta_0)$  با استفاده از معادلات (۲۴ و ۲۵) به شکل زیر است:

$$u_z(\theta) = \frac{T_z(\theta)}{\omega^{3/2}} = \frac{\Gamma^3}{\rho(\theta)^3} T_z(\theta) \quad (31)$$

به طور خلاصه، پیشرانه  $z$  در  $\theta_0$  شروع به سوزش می‌کند و فضایما میزان فاصله  $\Delta v$  را در طول فعالیت مداوم پیشرانه با متغیر بودن بزرگی پیشرانه می‌پیماید و بعد از آن در مکان  $\theta = \theta_0 + \Delta v$  قرار می‌گیرد و مکان و سرعت آن را می‌توان با اضافه کردن راه حل همگن به راه حل خصوصی به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} \bar{z}(\theta) \\ \bar{z}'(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}(\theta) \\ \hat{z}'(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{z}_p(\theta) \\ \bar{z}'_p(\theta) \end{bmatrix} \quad (32)$$

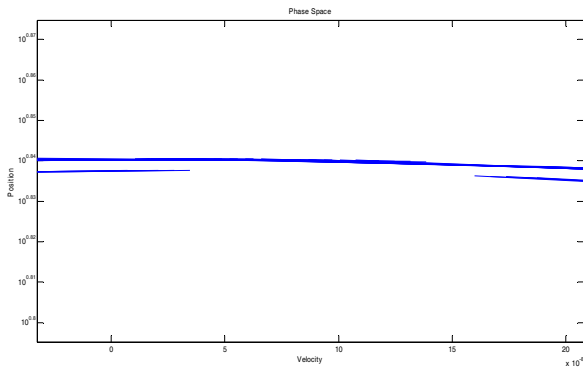
$$\begin{bmatrix} z(\theta) \\ \dot{z}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}(\theta) \\ \hat{z}'(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_p(\theta) \\ \dot{z}_p(\theta) \end{bmatrix} \quad (33)$$

وقتی فضایما پیشرو با آنومالی حقیقی و نهایی وقتی فضایما پیشرو با آنومالی حقیقی و نهایی  $\theta_f$  می‌رسد، پیشرانه خاموش می‌گردد و فضایما پیرو در مکان نسبی مطلوب قرار می‌گیرد. به این معنا که  $(\bar{z}(\theta_f), \bar{z}'(\theta_f))$  مقادیر از پیش تعریف شده هستند که قیود تابع پیشرانه را نشان می‌دهند. البته مقادیر مذکور باید از مکان و سرعت حقیقی بر اساس معادلات (۲۴، ۲۵) تبدیل پیدا کنند:

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_p(\theta_f) \\ \bar{z}'_p(\theta_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z}(\theta_f) \\ \bar{z}'(\theta_f) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{z}(\theta_f) \\ \hat{z}'(\theta_f) \end{bmatrix} \quad (34)$$

همانگونه که از شکل بر می‌آید، شکل نمودار به شکل حرکت نوسانی و پرپودیک می‌باشد که در واقع ذات پاسخ معادلات دینامیک نسبیت است. اگر چنانچه سیستم دینامیکی تحت تأثیر اغتشاشات و اختلالات بیرونی قرار نگیرد سیستم به صورت پایدار و مانا شروع به حرکت نوسانی می‌نماید. ولی چنانچه تأثیر عوامل اغتشاشی بیرونی را نیز لحاظ نماییم لازم است برای کسب پاسخ نوسانی و پرپودیک، از کنترل فعال استفاده نماییم.

در اینجا نیز ذکر این نکته نیز حایز اهمیت است که تنظیم این شرایط به عنوان شرط نهایی که به صورت پیش تنظیم انتخاب می‌گردد نقشی اساسی و مهم در طراحی ماموریت محوله داشته و باید با آنالیز و تحلیلی دقیق نسبت به ساختار مسئله محاسبه گردد تا خللی در اجرای موفق ماموریت مشرحه پیش نیاید.



شکل ۱۳- تنظیم کردن مقدار  $\theta$  به میزان  $\theta = 2\pi + 0.18\pi$  برای بسته شدن چرخه حدی (با جابه جایی محورها)

### آنالیز حل همگن سیستم و الزام استفاده از نیروی تراست کنترلی

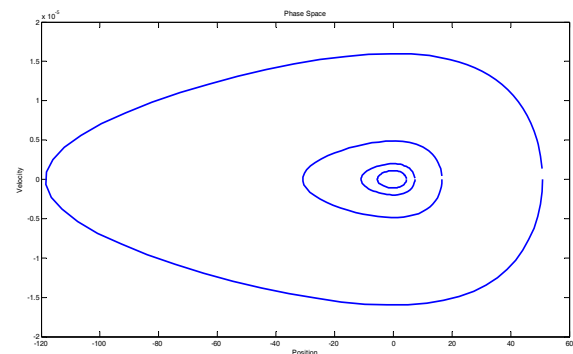
چنانچه در بخش‌های قبلی ملاحظه شد، معادلات شاونر-همپل دارای یک پاسخ همگن است. پاسخ همگن فوق الزاماً دارای حرکت نوسانی خواهد بود که به شدت تحت تاثیر ذات نیروهای خارجی می‌تواند قرار گیرد. نکته بیان شده فوق این موضوع را یاد آور می‌شود که باید از یک ساختار کنترلی استفاده نمائیم. لذا در این حوزه سعی خواهد شد که کنترلی برای سیستم در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر معادلات همگن به واسطه نیروهای اغتشاشی کیهانی مانند اثرات کرات و دیگر اجرام سماوی و نیز بادهای خورشیدی و غیره می‌تواند تحت تاثیر قرار گیرند. لذا با به کارگیری یک سیستم کنترل سعی خواهد شد که بر این معضل غلبه گردد که در ادامه مورد بحث قرار گرفته است.

چنان چه مشخص است، با وجود اثرات نیروهای اغتشاشی خارجی نمی‌توان پاسخ بسته‌ای (دارای رفتار هارمونیک کامل) ارائه نمود و آرایش پروازی ماموریت با مشکل روبه‌رو خواهد شد. در این جاست که کاربرد نیروی کنترلی اثر خود را در ایجاد یک رفتار مناسب برای ماموریت از خود نشان خواهد داد. نتیجتاً با در نظر گرفتن عامل کنترلی مانور بازآرایی، ساختار مطلوب خود را باز خواهد یافت. این موضوع در [8,20,21] نشان داده شده است.

(شکل ۱۴) مستخرج از مرجع [۲۵] نشان می‌دهد که در نبود عامل کنترلی رفتار ساختار بازآرایی چگونه تحت تاثیر قرار خواهد گرفت.

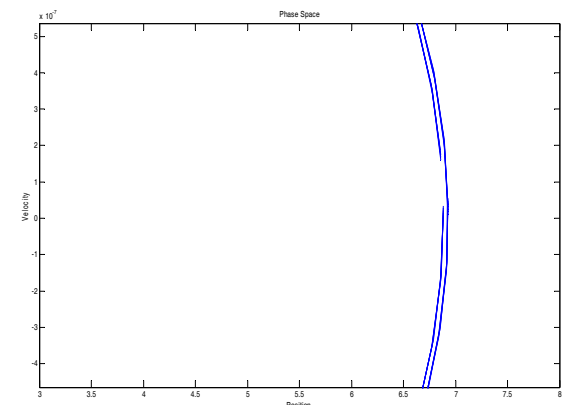
همچنین در این بخش لازم است توضیح مختصری پیرامون اثر کنترل بر سیستم باز آرایه ارائه شود. در نمودارهای به دست آمده از صفحه فاز کنترل معرفی شده برای این سیستم، فواصلی (گپ‌هایی) ایجاد خواهد شد که سیکل حدی سیستم برای بازه تعریف شده بسته نمی‌شود. این موضوع بیانگر آن است که شرایط انتهایی برای سیستم کنترل فوق دقیقاً تنظیم نشده است و در این جا لازم است که اهمیت کسب شرایط انتهایی مشخص شود.

این مفهوم در شکل ۱۱ به خوبی بیان شده است. در این شکل با تنظیم دقیق شرایط انتهایی به میزان  $\Delta\theta = 0.18\pi$  سیکل حدی بسته خواهد شد. این مفهوم مهم و اساسی را مراجع مختلفی مانند [۱۳ و ۹] به صورت از پیش تنظیم شده بیان کرده‌اند. اما در مراجع فوق به این نکته اساسی پرداخته نشده است که شناخت شرایط انتهایی، خود مستلزم آنالیز و بحث‌های ریاضیاتی متناسب به خود است.

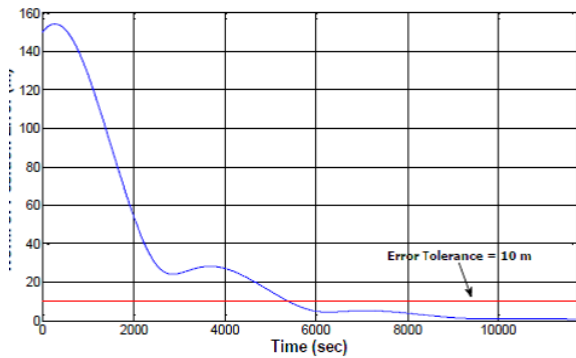


شکل ۱۱- نشان دادن نقاط گپ در نمودارهای صفحه فاز برای  $\theta \in [0, 2\pi]$

همچنین اگر  $\theta$  را به میزان  $\Delta\theta = 0.18\pi$  افزایش دهیم، سیکل حدی بسته خواهد شد.

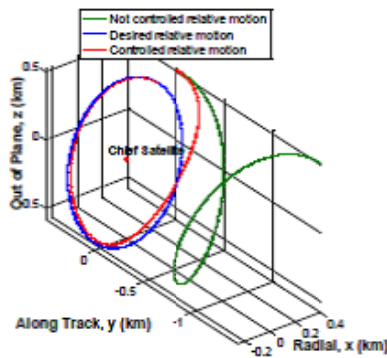


شکل ۱۲- تنظیم کردن مقدار  $\theta$  به میزان  $\theta = 2\pi + 0.18\pi$  برای بسته شدن چرخه حدی



شکل ۱۶- تاریخچه خطای حالت ماندگار [۲۵]

همچنین طبق [۲۶] برای تکمیل بحث می‌توان به شکل زیر رجوع نمود و اثر عامل کنترلی را بر روی معادلات شاونر-همپل با عامل کنترلی و بدون آن ملاحظه کرد.



شکل ۱۷- اثرات عامل کنترلی در قیاس با حالت حل همگن در دستگاه

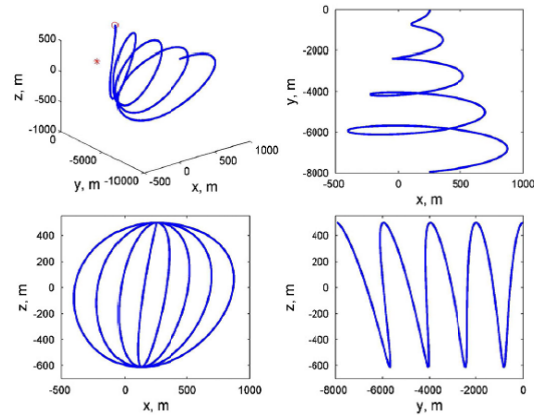
مختصات هیل [۲۶]

از شکل بالا (شکل ۱۷) چنان چه مشهود است، در نبود عامل کنترلی سیستم کاملاً از رفتار طبیعی خود خارج می‌گردد که صحنه گذاری بر لزوم استفاده از یک کنترلر مناسب برای مأموریت‌های بازآرایی است.

### نتیجه گیری

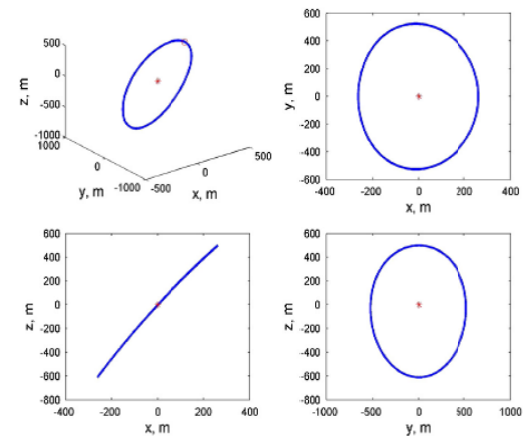
لزوم پرداختن به مقوله اجرام آسمانی بالقوه خطرناکی که حیات بر روی کره زمین را با مخاطره مواجه می‌سازند مانند شهاب سنگ‌ها، سیارک‌های فضایی و دنباله‌دارها بر کسی پوشیده نیست. در سالیان اخیر اهمیت پرداختن به این حوزه و طراحی مأموریت‌های فضایی با رویکردها و تکنولوژی‌های مختلف جهت انحراف این اجرام آسمانی از مسیر اصلی مداری خود و مرتفع کردن این تهدید به نحوه فزاینده ای رو به افزایش است. برای انجام این مأموریت با روش مذکور، استفاده از تکنولوژی پرواز آرایشی فضاییها که به علت انعطاف‌پذیری بالای مأموریتی دارای قابلیت‌ها و مزایای پرشماری در حیطه مأموریت‌های فضایی می‌باشد، مورد توجه قرار گرفته است. معادلات دینامیکی حرکت نسبی با لحاظ کردن تأثیرات خروج از

(شکل ۱۵) نیز بیان می‌دارد که با اعمال عامل کنترلی رفتار سیستم حرکتی بازآرایی کاملاً تحت کنترل در آمده است:



شکل ۱۴- بررسی صفحه ZY پرواز آرایشی با به کارگیری معادلات هیل-

کلوهسی-ویلشر بدون در نظر گرفتن نیروی کنترلی [۲۵]



شکل ۱۵- بررسی صفحه ZY پرواز آرایشی با به کارگیری عامل کنترلی

در معادلات هیل-کلوهسی-ویلشر [۲۵]

از طرف دیگر طبق بررسی مجدد معادلات شاونر-همپل خواهیم دید که معادلات فوق با ساده‌سازی‌هایی به دست آمده است. این ساده سازی اگرچه سبب راحتی در استفاده از آن‌ها و کاربردی شدن معادلات شده است و از دقت بالا و قابل قبولی نیز برخوردار است اما خود خطای کمی را به سیستم اضافه خواهد نمود. مرجع [۱۲] به خوبی به بیان این موضوع پرداخته است و نشان داده شده است که علی‌رغم استفاده از عامل کنترلی هنوز مقداری خطای حالت ماندگار وجود دارد که می‌تواند ناشی از مدل سازی سیستم به‌واسطه معادلات شاونر-همپل باشد. شکل ۱۶ به خوبی گویای این موضوع است.

در آخر نتیجه می‌شود که فقط به طور پسیو و غیرفعال نمی‌توان این ساختار را طبق طراحی اولیه حفظ کرد و قطعاً تحت تأثیر عوامل مختلف اغتشاشی بیرونی این ساختار دستخوش تغییرات خواهد شد که عاملی نامطلوب است فلذا در این جا به مأمور بازآرایی برای ایجاد مجدد ساختار مطلوب نیازمندیم.

- [11] Carter, T.E., "New Form for the Optimal Rendezvous Equations neara Keplerian Orbit," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 13, No. 1, 1990, pp. 183-186.
- [12] Cho, H.C. and Park, S.Y., "Analytic Solution for Fuel-Optimal Reconfiguration in Relative Motion," *J Optim Theory Appl*, Vol. 141, 2009, pp. 495-512.
- [13] Cho, H., Park, S.Y., Yoo, S. M. and Choi, K.H., "Analytical Solution to Optimal Relocation of Satellite Formation Flying in Arbitraryelliptic Orbits," *Journal of Aerospace Science and Technology*, Vol. 25, Issue 1, 2013, pp. 161-176.
- [14] Navvabi, M. and Hamrah, R., "Close Approach Analysis of Space Objects and Estimation of Satellite-Debris Collision Probability," *Journal of Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 87, No. 5, 2015, pp. 483-492.
- [15] Navvabi, M. and Hamrah, R., Modeling of Space Objects Propagation, Prediction of Closest Approaches Among Satellites, and Assessment of Maximum Collision Probability, *Journal of Space Science and Technology (JSST)*, Vol. 6, No. 1 (14), spring 2013, pp. 57-67.
- [16] Roshanian, J., Shams, J., shafieenejad, I. Motalebi, A.A., "Investigating Un-stability Phenomena in Deflection of Asteroid Apophis," *the 13<sup>th</sup> Iranian Aerospace Society Conference*, march 2014
- [17] Chesley, S., Potential Impact Detection for Near Earth Asteroids: The Case of 99942 Apophis (2004 MN4); *IAU Symposium No. 229: Asteroids, Comets, Meteors*, Rio de Janeiro, Brazil, August 7-12, 2005.
- [18] McInnes, C., "Near Earth Object Orbit Modification Using Gravitational Coupling," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 30, No. 3, 2007, pp. 870-873.
- [19] Lu, E.T. and Love, S.G., "Gravitational Tractor for Towing Asteroids," *Nature*, Vol. 438, Nov. 2005, pp. 177-178.
- [20] M. Navvabi, M. Barati, "A Comparative Study of Dynamics Models and a Control Strategy for Satellite Formation Flying," *Journal of Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 145, 2012, pp. 549-561.
- [21] Navvabi, M., Barati, M. and Khamseh, H.B., "A Comparative Study of Dynamics Models for Satellite Formation Flying - Cartesian Ordinary Differential Equations Description," *Recent Advances in Space Technologies (RAST), 5<sup>th</sup> International Conference on, IEEE*, 2011, pp.829-832.
- [22] Navvabi, M., Barati, M. and Bonyan, H., "Algebraic Orbit Elements Difference Description of Dynamics Models for Satellite Formation Flying," *Recent Advances in Space Technologies (RAST), 6<sup>th</sup> International Conference on, IEEE*, 2013, pp. 277-280.
- [23] Bong Wie, "Dynamics and Control of Gravity Tractor Spacecraft for Asteroid Deflection," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, September-October 2008.
- [24] Gong, Sh., Li, J. and Bao Yin, H., "Formation Flying Solar-Sail Gravity Tractors in Displaced Orbit for towing Near-Earth Asteroids," *Journal Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 105, Issue 1-3, 2009, pp. 105-159.
- [25] Navvabi, M. and Barati, M., "A Comparative Study of Dynamics Model and a Control Strategy for Satellite Formation Flying,
- [26] Navvabi, M. and Barati, M., "Dynamics Modeling of Spacecraft Formation Flying and Evaluating the Models Accuracy under the Effects of Relative Distance, Eccentricity and Earth Gravitational Perturbation," *Journal of Space Science and Technology (JSST)*, Vol. 5, No. 1, 2012, pp. 51-59.

مرکزیت مدار فضایی با معرفی معادلات شاونر- همپل ارائه شده است. در مسئله کنترل بیان شده در این تحقیق، مؤلفه‌های دینامیکی نسبی در یک مدار مرجع بیضی شکل به کار می‌روند. آنومالی حقیقی فضاپیما هم به عنوان یک متغیر مستقل برای راحتی کار استفاده می‌شود. حرکت خارج از صفحه از حرکت درون صفحه جدا در نظر گرفته شده به گونه‌ای که بتوان آن را به صورت مستقل به کار برد. اهمیت پرداختن به راستای خارج از صفحه به عنوان راستایی تاثیر گذار هم از منظر طراحی و تحلیل مأموریت و همچنین الزامات تکنولوژیکی مأموریتی مانند استفاده از تکنولوژی بادبان‌های خورشیدی برای انجام این مأموریت توضیح داده شده است. حل همگن مسئله با به کارگیری ماتریس انتقال ارائه شده و در ادامه با تحلیل و نشان دادن نمودارهایی لزوم به کارگیری کنترل فعال با استفاده از کنترلر برای بالابردن دقت در انجام مأموریت مورد نظر، مورد تأکید قرار گرفته است. اهمیت راه حل به کار گرفته شده در این تحقیق این است که روش مذکور هیچ‌گونه محدودیتی در استفاده نداشته و در مدارهای بیضوی با خروج از مرکز دلخواه با دقت بالا قابل به کارگیری می‌باشد.

## مرجع

- [1] Wie, B., "Astrodynamics Fundamentals for Deflecting Hazardous Near-Earth Objects," *IAC conference, sout korea*, 2009.
- [2] Chen, D.H. and Ozaki, S., "Numerical Study of Axially Crushed Cylindrical Tubes With Corrugated Surface," *Thin-Walled Structure*, Vol. 47, No. 11, 2009, pp. 1387-1396.
- [3] "Near-Earth Objects Survey and Deflection Analysis of Alternatives," NASA, Mar. 2007.
- [3] Hill, G. W., "Researches in the Lunar Theory," *American Journal of Mathematics*, Vol. 1, No. 1, 1878, pp. 5-26.
- [4] Lawden, D. F., *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworths, London, 1963, pp. 77-86.
- [5] Inalhan, G., Tillerson, M., and How, J. P., "Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 1, 2002, pp. 48-59.
- [6] Spencer, D., "The Effects of Eccentricity on the Evolution of an Orbiting Debris Cloud," *American Astronautical Society, AAS Paper 87-473*, Aug. 1987. *Formation Flying Design and Evolution*" *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001.
- [7] Vaddi, S.S., Vadali, S.R. and Alfriend, K.T., "Formation Flying: Accomodating Nonlinearity and Eccentricity Perturbation", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, 2003, p. 224.
- [8] Bae, J., Kim, Y., "Revisiting the General Periodic Relative Motion in Elliptic Reference Orbits", *Acta Astronautica*, Vol. 85, 2013, pp. 100-112.
- [9] Palmer, P., Optimal Relocation of Satellites Flying in Near-Circular-Orbit Formations, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 3, 2006, pp. 519-526.
- [10] Carter, T. E., and Humi, M., "Fuel-Optimal Rendezvous near a Point in General Keplerian Orbit," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 6, 1987, pp. 567-573.