

Research Paper

A New Online Meta-Heuristic Adaptive GMRES Method to Estimate the Attitude and the Model of a Satellite

M. Navabi^{1*} and Sh. Hosseini²

1, 2. Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

*M_Navabi@sbu.ac.ir

Increasing precision and stability of the online estimation of a spacecraft's model, due to the uncertainty and noise is one of the challenges in the attitude control of the space systems. The least squares error method in combination with the Kalman filter is one of the effective methods for estimating these types of dynamic models. Based on the development of the GMRES (generalized minimal residual) methods, in order to increase the performance of the estimation method, a new online meta-heuristic algorithm is proposed. The algorithm is an iterative-based method that uses previous step information based on user experience, or a new online meta-heuristic method which determines the number of steps to solve the matrix equations system in the Krylov subspace and improves overall convergence to the response. In order to evaluate the accuracy of this estimation method, the GMRES, Bi-CG (Bi Conjugate Gradient), CGS (Conjugate Gradients Squared), BI-CGSTAB (Bi Conjugate Gradient Stabilized) methods are compared that the online meta-heuristic GMRES method shows the highest accuracy and stability in the estimation.

Keywords: Adaptive GMRE, Model estimation, Attitude estimation, Meta-heuristic

1. Associate Professor (Corresponding Author)

2. PhD Assistant

الگوریتم جدید فرا ابتکاری کمترین باقیمانده تعمیم یافته تطبیقی در تخمین وضعیت و مدل فضاپیما

محمد نوابی^{۱*} و شهرام حسینی^۲

۱ و ۲ - دانشکده مهندسی فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی

*تهران، کد پستی: ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳

m_navabi@sbu.ac.ir

افزایش دقت و پایداری در تخمین آنلاین مدل یک فضاپیما، به دلیل همزمانی وجود نامعینی در دینامیک سیستم و نویز در خروجی حسگرهای وضعیت، یکی از چالش های حوزه دینامیک و کنترل وضعیت سیستم های فضایی است. یکی از روش های مؤثر تخمین این نوع از مدل های دینامیکی، روش کمترین مربعات خطا در ترکیب با فیلتر کالمن است. برای افزایش عملکرد روش تخمین ذکر شده، الگوریتم آنلاین فرا ابتکاری جدیدی براساس توسعه روش کمترین باقیمانده تعمیم یافته ارائه می گردد. این الگوریتم یک روش مبتنی بر تکرار است که با استفاده از اطلاعات مرحله قبل و بر اساس تجربه کاربر، و یا یک روش فرا ابتکاری آنلاین نوین، تعداد گام های حل دستگاه در زیر فضای کرلیف را تعیین کرده و همگرایی کلی به پاسخ را بهبود می بخشد. برای بررسی دقت تخمین این روش، روش های کمترین باقیمانده تعمیم یافته ساده، گرادیان دو مزدوجی، گرادیان مزدوج مربعی و گرادیان دو مزدوجی پایدار مقایسه شده است، که روش آنلاین فرا ابتکاری کمترین باقیمانده تعمیم یافته تطبیقی دقت تخمین را بیش از ۱۰ برابر افزایش داده و پایداری بیشتری در پاسخ را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: کمترین باقی مانده تعمیم یافته تطبیقی، تخمین مدل، تخمین وضعیت، فرا ابتکاری

		علائم و اختصارات	
k'	ضرایب کنترلی	A, B, C	ماتریس های حالت سیستم گسسته
L	بازه زمانی الگوریتم	A_c, B_c, C_c	ماتریس های حالت سیستم پیوسته
n	سرعت زاویه ای زمین	\hat{A}	ماتریس تخمین مدل
p	قطب های سیستم حلقه بسته	A_c'	ماتریس حالت سیستم حلقه باز پیوسته
q	بردار وضعیت	$\square^{m \times n}$	فضای ماتریسی $m \times n$
\square^n	فضای برداری مرتبه n	e_1	بردار یکه
T_g	گشتاور گرادیان جاذبه	I_x, I_y, I_z	ممان اینرسی در جهت $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$
T_u	گشتاور کنترلی	I_n	ماتریس همانی
t	زمان	J_2	تابع هزینه
v	اغتشاشات خروجی	k	شمارنده تکرار الگوریتم کالمن
V_k	ماتریس بردارهای متعامد زیر فضای کرلیف		
x	بردار حالت سیستم		
\hat{x}	بردار حالت تخمینی		
y	بردار خروجی سیستم		
Y	ماتریس بردارهای خروجی		

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)

۲. دانشجوی دکتری

پایین در تخمین مدل می‌شود. این چرخه تکراری، تخمین مدل را بسیار دشوار می‌کند و مدل تخمینی تنها برای تخمین تقریبی وضعیت مناسب است و برای استفاده به‌عنوان دینامیک سیستم در کنترل نامناسب است. اما یکی از روش‌های توسعه داده‌شده حل دستگاه‌های ماتریسی روش کمترین مربعات باقی‌مانده است که الگوریتم‌های ترکیبی این روش عملکرد بالایی دارند [۱۹، ۲۰]. انواع الگوریتم‌های کمترین باقیمانده تعمیم‌یافته تطبیقی (Adaptive GMRES³) نشان داده‌اند که عملکرد بالایی دارند [۲۱، ۲۲]، در این مقاله یک نوع الگوریتم کمترین باقیمانده تعمیم‌یافته تطبیقی نوین، توسعه داده شده است. این الگوریتم با استفاده از اطلاعات حل مراحل قبل و بر اساس محدود کردن گام حل در پیشروی به سمت پاسخ بهینه محلی، دقت تخمین مدل را افزایش می‌دهد. این روش با استفاده از یک الگوریتم نوین هوشمند آنلاین و با یک الگوریتم تجربی آفلاین برای تعیین تعداد گام‌های حل در هر تکرار، دقت همگرایی کلی به سمت جواب دقیق مسئله را بسیار افزایش می‌دهد. مدل تخمینی در این روش با دقت خوبی به مدل اصلی فضایی نزدیک می‌شود. این مدل توانایی استفاده در الگوریتم‌های تطبیقی، پیش‌بین و حتی کنترل‌های قدیمی معمول برای افزایش عملکرد کنترل را نیز دارد. در این مقاله ابتدا مدل دینامیکی یک درجه و سپس مدل سه درجه آزادی کنترل وضعیت فضایی معرفی شده است. در ادامه روش Adaptive GMRES معرفی شده که روش‌های تجزیه QR، کمترین باقیمانده تعمیم‌یافته ساده (GMRES)، گرادیان دو مزدوجی (Bi_CG⁴)، گرادیان مزدوج مربعی (CGS⁵) و گرادیان دو مزدوجی پایدار (Bi_CGSTAB⁶) برای مقایسه با روش بیان شده استفاده می‌شود. در انتها نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و مقایسه این روش‌ها ارائه گردیده است.

معادلات فضای حالت

ابتدا یک مدل دینامیکی یک درجه ساده با ماتریس حالت $A_{2 \times 2}$ و سپس مدل سه درجه با ماتریس حالت $A_{6 \times 6}$ فضایی با در نظر گرفتن گشتاورهای گرادیان جاذبه مدل می‌شود. مدل یک درجه به‌صورت معادلات (۱) ارائه شده است [۲۳].

$$\dot{x} = [A_c' - B_c k']x = A_c x \quad (1)$$

در رابطه (۱)، A_c' ماتریس حالت حلقه باز و A_c حلقه بسته سیستم است. ضرایب کنترلی k' با استفاده از روش کنترلی جایابی قطب محاسبه شده است.

κ	مجموعه بردارهای زیرفضای کرلیف
λ	ضریب گسسته سازی
ν	بردارهای متعامد زیر فضای کرلیف
$\hat{\theta}$	بردار تخمین
φ, θ, ψ	زوایای اولیه
ω	سرعت زاویه‌ای فضایی

مقدمه

با توجه به توسعه روزافزون سامانه‌های فضایی، کنترل وضعیت این سیستم‌ها بسیار حائز اهمیت است. بسیاری از روش‌های کنترل وضعیت، مستلزم داشتن یک مدل نسبتاً دقیق از دینامیک سیستم، به همراه تخمین دقیق متغیرهای حالت هستند [۱]. مطالعات فراوانی برای شناسایی مدل و تخمین پارامتر در فضایی‌ها و ماهواره‌ها انجام شده است [۲-۴]. تمرکز بسیاری از مقالات تخمین مدل بر روی روش‌های تعیین تابع هزینه بر اساس مدل‌های دینامیکی خطی و غیرخطی جدید و یا استفاده از روش‌های ترکیبی تطبیقی یا الگوریتم‌های تصادفی جدید برای مدل‌سازی در شناسایی سیستم بوده است [۵-۶]. در این مقاله تمرکز بر استفاده از روش‌های مدرن حل دستگاه در جبر خطی [۷]، برای افزایش دقت و پایداری روش‌های شناسایی سیستم بر اساس تابع هزینه کمترین مربعات باقی‌مانده است. در سال‌های اخیر روش‌های تکراری و بازگشتی برای حل دستگاه‌های ماتریسی توسعه زیادی داده شده‌اند [۸-۱۰]، که در تخمین متغیرهای حالت و مدل کاربردهای فراوانی دارند [۱۱]. الگوریتم‌های مشاهده متغیرهای حالت و فیلتر کالمن، روش‌های تخمین متغیرهای حالت یا همان تخمین وضعیت محسوب می‌شوند، که بر اساس روش‌های مبتنی بر ورودی-خروجی سیستم کار می‌کنند [۱۲، ۱۳]. برای شناسایی و تخمین مدل، روش کمترین مربعات نشان داده که روشی مؤثر است و دقت مناسبی دارد [۱۴]. روش کمترین مربعات باقیمانده در تخمین مدل، با استفاده از روش‌های تکراری و بازگشتی توسعه داده شده است، که عملکرد این روش را به‌مراتب افزایش می‌دهد [۱۵-۱۷]. در مأموریت‌های فضایی بر اساس شرایط دینامیکی سیستم مانند مصرف سوخت، باز و بسته شدن بازوها و یا تغییر شرایط کاری و خرابی، مدل سیستم دچار تغییراتی شده و به خاطر دور از دسترس بودن فضایی باید به‌صورت هم‌زمان دینامیک مدل و متغیرهای حالت تخمین زده شوند. در برخی از پژوهش‌ها، روش‌های ترکیبی تخمین هم‌زمان متغیرهای حالت و تخمین مدل، که بر اساس روش‌های تکراری هستند، استفاده شده است [۱۸]. ولی دستگاه ماتریسی نهایی استخراج‌شده با این روش‌ها، با استفاده از روش‌های معمولی موجود حل شده است. با توجه به نامعین بودن مدل فضایی، عملکرد و تخمین اولیه فیلتر کالمن استفاده‌شده برای تخمین وضعیت، از دقت بسیار پایینی برخوردار است و باعث دقت

3. Adaptive Generalized Minimum Residual
4. Bi Conjugate Gradient
5. Conjugate Gradients Squared
6. Bi Conjugate Gradient Stabilized

$$\begin{aligned} T_{ux} + T_{gx} &= I_x \ddot{\phi} - n(I_x - I_y + I_z)\dot{\psi} + 4n^2(I_y - I_z)\phi \\ T_{uy} + T_{gy} &= I_y \ddot{\theta} + 3n^2(I_x - I_z)\theta \\ T_{uz} + T_{gz} &= I_z \ddot{\psi} + n(I_x - I_y + I_z)\dot{\phi} + n^2(I_y - I_x)\psi \end{aligned} \quad (۸)$$

اگر $u = [T_{ux}, T_{uy}, T_{uz}]^T$ ، $q = [\phi, \theta, \psi]^T$ باشند، معادلات (۸) می تواند شبیه معادلات لاگرانژ به صورت معادلات (۹) معرفی شود [۲۵].

$$M\ddot{q} + N\dot{q} + Lq = G_u u \quad (۹)$$

در معادلات (۹) ماتریس های ضرایب به صورت روابط (۱۰) هستند.

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \\ N &= n \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_x + I_y - I_z \\ 0 & 0 & 0 \\ -I_x + I_y - I_z & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ L &= n^2 \begin{bmatrix} 4(I_y - I_z) & 0 & 0 \\ 0 & 3(I_x - I_z) & 0 \\ 0 & 0 & (I_y - I_x) \end{bmatrix} \\ G_u &= I_3 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

اگر بردار وضعیت به صورت $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$ و معادلات حلقه بسته فضای حالت به فرم معادلات (۱۱) در نظر گرفته شوند، ماتریس های فضای حالت پیوسته به صورت معادلات (۱۱) تبدیل می شود.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}L & -M^{-1}N \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}G_u \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

ماتریس ضرایب کنترلی k' نیز با استفاده از روش جابجایی قطب برای مدل ارائه شده محاسبه می گردد. در معادلات سیستم اگر ممان اینرسی ها به صورت $I_x = 82, I_y = 80, I_z = 4$ باشد و قطب های سیستم به صورت مقادیر بیان شده در رابطه (۱۲) در نظر گرفته شوند،

$$p = \begin{bmatrix} -7.5034 \\ -0.2041 + 0.4115i \\ -0.2041 - 0.4115i \\ -0.5441 \\ -0.2536 + 0.4550i \\ -0.2536 - 0.4550i \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

ماتریس های فضای حالت سیستم حلقه بسته گسسته سازی شده طبق معادلات (۲)، به صورت روابط (۱۳) بیان می شوند.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.91 & 0 & 0 & 0.79 & 0 & 0 \\ 0 & 0.89 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\ -3.2e-4 & 0 & 0.66 & -3.1e-4 & 0 & 0.16 \\ -0.16 & 0 & 0 & 0.59 & 0 & 0 \\ 0 & -0.205 & 0 & 0 & 0.51 & 0 \\ -6e-4 & 0 & -0.66 & -6e-4 & 0 & -0.67 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}, C = I_6 \end{aligned} \quad (۱۳)$$

فضای حالت معادلات (۱) با استفاده از روش کزنک- نیکلسون [۲۴] که یک روش پایدار است، گسسته سازی می شود. البته باید توجه داشت که هر چه ماتریس فضای حالت فضاییما بزرگ تر می شود، حساسیت روش گسسته سازی و تأثیر آن بر دقت حل بیشتر نمایان می شود.

$$\begin{aligned} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= \lambda Ax(t+\Delta t) + (1-\lambda)Ax(t) \\ \text{if } \lambda &= 0.5, \Delta t = 1 \end{aligned} \quad (۲)$$

$$x(t+\Delta t) = (I - A)^{-1}(I + A)x(t)$$

$$y(t) = cx(t) + v(t)$$

در رابطه (۲)، $v(t)$ اغتشاشات اندازه گیری حسگر به صورت تابع گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ است. ماتریس های فضای حالت حلقه بسته یک درجه فضاییما پس از گسسته سازی معادلات به صورت روابط (۳) ارائه می گردد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.66 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معادلات غیرخطی سه درجه فضاییما [۲۳] در قالب معادلات (۴) بیان می شود.

$$\begin{aligned} T_{ux} + T_{gx} &= I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \\ T_{uy} + T_{gy} &= I_y \dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) \\ T_{uz} + T_{gz} &= I_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) \end{aligned} \quad (۴)$$

برای زوایای کوچک اویلر، سرعت زاویه ای فضاییما در دستگاه بدنی نسبت به اینرسی، با توجه به سرعت زاویه ای ماهواره در مدار زمین (n) به صورت معادلات (۵) ارائه می شود.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} - n\psi \\ \omega_y &= \dot{\theta} - n \\ \omega_z &= \dot{\psi} - n\phi \end{aligned} \quad (۵)$$

که در معادلات (۵)، ϕ, θ, ψ ، زوایای اویلر هستند.

برای یک فضاییما در حال چرخش در مدارهای پایین زمین گشتاور گرادیان جاذبه سه محوره به صورت معادلات (۶) است [۲۵].

$$\begin{aligned} T_{gx} &= 3n^2(I_z - I_y)\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi \\ T_{gy} &= 3n^2(I_z - I_x)\cos\theta\sin\theta\cos\phi \\ T_{gz} &= 3n^2(I_x - I_y)\cos\theta\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \quad (۶)$$

برای زوایای کوچک اویلر معادله (۶) می تواند به صورت معادلات (۷) در نظر گرفته شود.

$$\begin{aligned} T_{gx} &= 3n^2(I_z - I_y)\phi \\ T_{gy} &= 3n^2(I_z - I_x)\theta \\ T_{gz} &= 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

با جایگذاری معادلات (۵) و (۷) در (۴) و خطی سازی آن، معادلات خطی فضاییما به صورت معادلات (۸) می شود [۲۵].

معادلات تخمین مدل

با توجه به این که تخمین مدل و تخمین پارامتر در روش ارائه شده در این مقاله به صورت هم‌زمان انجام می‌شود، با استفاده از \hat{x}_{k-1} محاسبه شده در تکرار آخر توسط فیلتر کالمن، ابتدا تخمین مدل بر اساس روش کمترین مربعات خطا به صورت زیر پیاده‌سازی می‌شود. با استفاده از تابع هزینه کمترین مربعات خطا در معادله (۱۴) و مینیمم کردن این تابع، تخمین مدل با حل معادله (۱۵) حاصل می‌شود [۲۰] که حل این دستگاه فرامعین، روش‌های متنوعی دارد و تمرکز روش نوین ارائه داده شده در این مقاله، بر روش حل این دستگاه معادلات است.

$$J_2(\hat{\theta}) = \|Y - H\hat{\theta}\|^2 \quad (14)$$

$$H\hat{\theta} = Y \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، θ پارامتر تخمین‌زده شده است و H با استفاده از رابطه (۱۶) استخراج می‌شود.

$$\hat{\phi}_k(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{n,k-1}(t-1) \\ \hat{x}_{n-1,k-1}(t-1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{1,k-1}(t-1) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{H} = [\hat{\phi}_k(1) \quad \hat{\phi}_k(2) \quad \dots \quad \hat{\phi}_k(L)]$$

در رابطه (۱۶)، L طول زمان انجام مانور است. بر اساس رابطه $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$ با استفاده از معادلات (۱۷) محاسبه می‌شود و معادله (۱۵) مجدد بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{aligned} Y_o(t) - \hat{X}_k(t) &= 0 \rightarrow Y_o(t) - \hat{A}_k \hat{X}_k(t-1) \dots \\ -BU_k(t-1) &= 0 \\ \hat{A}_k \hat{X}_k(t-1) &= Y_o(t) - BU_k(t-1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}_k(t) &= \hat{A}_k \\ \hat{H}_k(t) &= \hat{X}_k(t-1) \\ Y(t) &= Y_o(t) - BU_k(t-1) \end{aligned} \right\} \hat{\theta}_k(t) \hat{H}_k(t) = Y(t)$$

در رابطه (۱۷)، $U(t-1) = [u(1) \quad u(2) \quad \dots \quad u(L-1)]$

$Y_o(t) = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(L)]$ و $\hat{x}(t) = [\hat{x}(1) \quad \hat{x}(2) \quad \dots \quad \hat{x}(L)]$ بردار تخمین وضعیت و \hat{A} ، B و C ماتریس‌های فضای حالت سیستم هستند.

معادلات فیلتر کالمن

با توجه به اینکه روش تخمین مدل آورده شده در قسمت قبل بر اساس تخمین تمام متغیرهای حالت از خروجی فیلتر کالمن مرحله $k-1$ محاسبه شد، برای دقت بیشتر در تخمین، از فیلتر کالمن با پس‌خورد کامل متغیرهای حالت استفاده می‌شود که روابط آن در

معادلات (۱۸) آورده شده است [۱۸]. البته می‌توان از پس‌خورد خروجی نیز استفاده کرد که دقت حل را به صورت ناچیز تحت تأثیر قرار می‌دهد.

$$\hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) + Bu(t) + L_k(t)[y(t) - C\hat{x}(t)],$$

$$\hat{x}(1) = 1_n / p_0$$

$$L_k(t) = \hat{A}_k P_k(t) C^T [I_n + C P_k(t) C^T]^{-1} \quad (18)$$

$$P_k(t+1) = \hat{A}_k P_k(t) \hat{A}_k^T \dots$$

$$- \hat{A}_k^T L_k(t) C P_k(t) C^T L_k^T(t) \hat{A}_k^T, \quad P_k(1) = I_n$$

در رابطه (۱۸)، بردار تخمین وضعیت و \hat{A} ، B و C ماتریس‌های فضای حالت سیستم هستند.

الگوریتم کمترین باقیمانده تعمیم یافته تطبیقی

آفلاین و آنلاین فرا ابتکاری

برای انجام یک تخمین دقیق و پایدار بر اساس روش ارائه شده در بخش قبل، باید معادله (۱۵) یا در نهایت (۱۷) با استفاده از یک روش مناسب که بر دینامیک مسئله منطبق باشد، حل شود. به دلیل دینامیک لخت فیلتر کالمن اگر از معادله $\hat{H}_k(t) \hat{\theta}_k(t) = Y(t)$ بدون هیچ‌گونه اطلاعاتی از گذشته یا شرایط اولیه، $\hat{\theta}_k(t)$ محاسبه‌شود، به دلیل اینکه در محاسبات به جای $x(t)$ ، از تخمین مرحله قبل یعنی $\hat{x}(t)$ استفاده شده است، پاسخی با دقت بسیار پایین به دست می‌آید.

برای رفع این مشکل و با توجه به کند بودن دینامیک فضایی و مشخص بودن شرایط قبل از تغییرات، مانند مصرف سوخت، جابه‌جایی بازوها یا به‌طور کلی مشخص بودن اطلاعات ماتریس‌های حالت قبل از هرگونه خرابی یا تغییر دیگر، برای یک تخمین مناسب از ماتریس A ، می‌توان از الگوریتم‌هایی استفاده کرد که بر اساس یک شرایط اولیه و با استفاده از گام‌های قابل تنظیم از شرایط اعمالی اولیه به سمت پاسخ می‌روند.

برای حل دستگاه ماتریسی خروجی از معادلات (۱۷)، الگوریتم Adaptive GMRES با توجه به یک شرایط اولیه مناسب، شروع به حل مسئله کرده و به سمت پاسخ نهایی می‌رود. به دلیل ماهیت تکراری بودن این روش و افزایش دقت در هر گام تکرار، می‌توان با اتخاذ یک روش مناسب در تعیین میزان دقت حل و یا گام پیشروی به سمت پاسخ مسئله، اطلاعات شرایط اولیه و یا شرایط حل گام قبل را به میزان دلخواه در حل جاری مسئله حفظ کرد، البته قابل ذکر است هرچند در روش GMRES، شرایط اولیه مناسب وارد الگوریتم می‌شود ولی به دلیل عدم تعیین مناسب گام‌های حل مسئله، و ماندن پاسخ مسئله در یک نقطه بهینه محلی، دقت این روش نیز بسیار کم است. در نتیجه با توجه به موارد عنوان شده برای رفع مشکل دقت و پایداری الگوریتم در حل مسئله تخمین، یک نوع روش Adaptive GMRES توسعه داده شده است.

گام‌های حل، ماندن پاسخ مسئله در بهینه‌های محلی و عدم همگرایی به بهینه کلی است. بر اساس تعداد دفعات زیاد شبیه‌سازی و تخمین مدل، یک برنامه حل زمانی از پیش تعیین شده برای حل معادله (۱۷) این گونه است که در ۳ گام زمانی نخست حل، الگوریتم تنها یک تکرار به سمت پاسخ مسئله پیش می‌رود ولی در ادامه تا دقت باقیمانده 10^{-6} معادله مورد نظر را حل می‌کند که دقیق‌ترین پاسخ را در بین روش‌های مطرح شده در مطالعات قبلی ارائه می‌دهد. برای معادلات سه درجه آزادی دینامیک وضعیت، ماتریس A دارای ابعاد 6×6 است که با توجه به بزرگ شدن بردار پارامترهای نامعین که دارای ۳۶ المان است، نیاز به محدودسازی بیشتری در گام‌های حل دستگاه نهایی مسئله تخمین است، زیرا تعداد بهینه‌های محلی نیز بیشتر می‌شوند. برای این مدل، الگوریتم ارائه شده در ۷ گام زمانی اول، با ۱ تکرار به سمت حل و سپس با ۳ تکرار به سمت پاسخ مسئله می‌رود. این محدودسازی گام پیشروی در حرکت به سمت پاسخ بهینه محلی بازم منجر به همگرایی بسیار بهتر جواب کلی مسئله تخمین می‌شود.

روش آنلاین فرا ابتکاری

یکی از مهم‌ترین چالش‌های روش Adaptive GMRES بر اساس سعی و خطا که در ادامه به اختصار به آن روش تجربی گفته می‌شود، به دست آوردن تعداد گام‌های مناسب حل در طول مسیر مانور شناسایی است که بر اساس تجربه حل مسئله تخمین در دفعات زیاد به دست می‌آید. در روش بر خط فرا ابتکاری جدید ارائه شده، در مقایسه با الگوریتم (۱۹)، یک روش تصادفی جدید برای یافتن ماتریس $\hat{A}(t+1)$ که در گام بعد الگوریتم برای تخمین وضعیت استفاده می‌شود، ابداع شده است. ویژگی متمایز این روش فرا ابتکاری نسبت به الگوریتم‌های مرسوم موجود مانند ژنتیک، لانه مورچگان و غیره در آنلاین بودن این روش است. در این روش در هر گام با مقایسه نرم فروبنیوس^۹ ماتریس $\|\hat{A}^{k+1} - \hat{A}_{uncertain}\|_{fro}$ با گام قبل، ماتریس \hat{A}^{k+1} که در تمام تکرارها دارای کمترین نرم خطاست، برابر $\hat{A}(t+1)$ قرار داده می‌شود تا برای تخمین وضعیت مرحله بعد در فیلتر کالمن استفاده شود. در الگوریتم (۲۱)، عبارت است از حاصل ضرب ماتریس A_0 (ماتریس حالت اولیه فضاییما قبل از خرابی، تغییر یا همان حدس اولیه) در یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت و دامنه تغییرات بین $1 - \alpha_0$ تا $1 + \alpha_0$ که برای تعیین دامنه جستجوی ماتریس هدف حول شرایط اولیه استفاده می‌شود. البته تعیین پارامتر α_0 از حساسیت بالایی برخوردار

الگوریتم روش GMRES در معادلات (۱۹) ارائه شده است [۷].

1. Input initial vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \hat{H}$
2. $r^{(0)} = b - \hat{H}x^{(0)}, v_1 = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$
 $\beta = \|r^{(0)}\|, \rho = \|r^{(0)}\|$
3. Set parameter $k = 0$
4. While $\rho > \eta \|b\|_2$ Do:
5. Set parameter $k = k + 1$
6. For $j = 1, 2, \dots, k$ Do :
7. $h_{jk} = (\hat{H}v_k)^T v_j$
8. EndDo
9. $v_{k+1} = \hat{H}v_k - \sum_{j=1}^k h_{jk} v_j$
10. $h_{k+1,k} = \|v_{k+1}\|_2$
11. $v_{k+1} = v_{k+1} / \|v_{k+1}\|_2$
12. $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$
13. Compute y_k the minimum of $\|\beta e_1 - H_k y\|$
14. $\rho = \|\beta e_1 - H_k y_k\|_2$
15. $x^{(k+1)} = x^{(0)} + V_k y_k$
16. EndDo.

در الگوریتم GMRES آورده شده در روابط (۱۹)، H_k ماتریس متشکل از بردارهای h_{jk} است و بردارهای v_{i+1} یک متعامد تشکیل دهنده ستون‌های ماتریس V_k هستند، و پایه‌های متعامد زیرفضای کرلیف $\kappa_k(r^{(0)}, A)$ را تشکیل می‌دهند که زیرفضای پاسخ دستگاه ماتریسی ذکر شده است [۷]. یکی از روش‌های محاسبه بردارهای v_{i+1} استفاده از الگوریتم آرنولدی است که طبق معادلات (۲۰) می‌باشد [۷].

1. Input initial vector $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
2. $r^{(0)} = b - \hat{H}x^{(0)}, v_1 = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$
3. For $i = 1, 2, \dots, k - 1$ Do :
4. $v_{i+1} = \frac{\hat{H}v_i - \sum_{j=1}^i ((\hat{H}v_i)^T v_j) v_j}{\|\hat{H}v_i - \sum_{j=1}^i ((\hat{H}v_i)^T v_j) v_j\|_2}$
5. EndDo

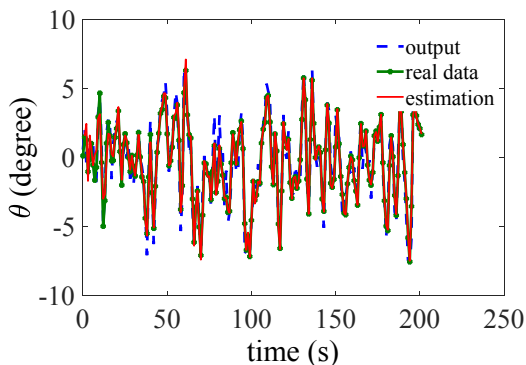
روش سعی و خطا آنلاین

در روش حل Adaptive GMRES ارائه شده برای مدل یک درجه که دارای ماتریس A با ابعاد 2×2 است، با توجه به تعداد المان‌های نامعین ماتریس A که تنها ۴ عدد هستند، محدودسازی کمتری در گام‌های حل صورت می‌گیرد. دلیل این محدودسازی

نسبت به گام قبل لزوماً کوچکتر نشود، ولی نسبت به $\| \hat{A}(t+1) - \hat{A}_{uncertain} \|_{fro}$ کوچکتر باشد که باعث ایجاد یک دامنه جستجوی تصادفی شده و امکان گیر افتادن الگوریتم در بهینه‌های محلی را بسیار کاهش می‌دهد. هرچند این دامنه جستجوی تصادفی در ظاهر این گونه نشان می‌دهد که ممکن است نرم $\hat{A}(t+1)$ به صورت کلی کوچک نشود ولی کاهش نرم در هر گام زمانی در این الگوریتم باعث می‌شود که خروجی فیلتر کالمن نیز کمی اصلاح شود. در نتیجه در معادله (۱۷) باعث اصلاح اطلاعات ماتریس $\hat{H}_k(t)$ شده و نهایتاً هم نرم کلی ماتریس خطا به صفر میل می‌کند و هم دقت تخمین فیلتر کالمن بسیار افزایش می‌یابد. علت استفاده از نرم فروبنیوس در الگوریتم جستجو این است که شبیه‌سازی‌های متعدد نشان داده که این نرم، دامنه جستجوی باز و دقیق‌تری حول نامعینی‌های هر المان ایجاد کرده و الگوریتم راحت‌تر به پاسخ می‌رسد. مزیت دیگر این الگوریتم استفاده از ماتریس حالت A_0 در گام‌های نخست حل مسئله تخمین است تا زمانی که الگوریتم بیان شده، ماتریس حالت $\hat{A}(t+1)$ بهتری نسبت به شرایط اولیه پیدا کند و مسیر حرکت به سمت بهینه کلی طی شود.

نتایج شبیه‌سازی

ابتدا نتایج حاصل از شبیه‌سازی مدل یک درجه آزادی ارائه شده است. ک برای نشان دادن کارایی مناسب روش Adaptive GMRES، میزان ۵۰ درصد نامعینی در ممان اینرسی فضاپیما وارد می‌شود. شکل (۱)، پاسخ زاویه فراز سیستم به ورودی تصادفی با توزیع نرمال دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ است که در آن از الگوریتم Adaptive GMRES تجربی برای تخمین مدل استفاده می‌گردد.



شکل ۱- پاسخ زاویه فراز مدل به ورودی تصادفی با روش Adaptive GMRES تجربی برای مدل یک درجه

شکل (۱) نشان می‌دهد که پس از گذشت حدود ۱۰۰ ثانیه تخمین وضعیت به خوبی انجام شده است که این کاهش خطا در تخمین

است، زیرا در صورت خیلی کوچک بودن باعث می‌شود که الگوریتم، پاسخ را پیدا نکند، و در صورت خیلی بزرگ بودن نیز پاسخ نوسانی می‌شود.

1. Input initial matrix $\hat{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \alpha_0, \hat{H}$
2. $x^{(0)} = \text{vec}(\hat{A}(t))$
3. $\hat{A}(t+1) = \hat{A}(t)$
4. $r^{(0)} = b - \hat{H}x^{(0)}, v_1 = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$
 $\beta = \|r^{(0)}\|, \rho = \|r^{(0)}\|, \alpha = \alpha_0$
5. Set parameter $k = 0$
6. While $k \leq n$ Do:
7. Set parameter $k = k + 1$
8. For $j = 1, 2, \dots, k$ Do :
9. $h_{jk} = (\hat{H}v_k)^T v_j$
10. EndDo
11. $v_{k+1} = \hat{H}v_k - \sum_{j=1}^k h_{jk} v_j$
12. $h_{k+1,k} = \|v_{k+1}\|_2$
13. $v_{k+1} = v_{k+1} / \|v_{k+1}\|_2$
14. $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$
15. Compute y_k the minimum of $\|\beta e_1 - H_k y\|_2$
16. $\rho = \|\beta e_1 - H_k y_k\|_2$
17. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + V_k y_k$
18. $\hat{A}_{\min}^{k+1} = \text{mat}_n(x^{(k+1)})$
19. $\hat{A}_{uncertain} = A_0(2\alpha * \text{rand} + 1 - \alpha)$
20. if $\|\hat{A}_{\min}^{k+1} - \hat{A}_{uncertain}\|_{fro} < \|\hat{A}(t+1) - \hat{A}_{uncertain}\|_{fro}$
21. $\hat{A}(t+1) = \hat{A}_{\min}^{k+1}$
22. Endif
23. EndDo.

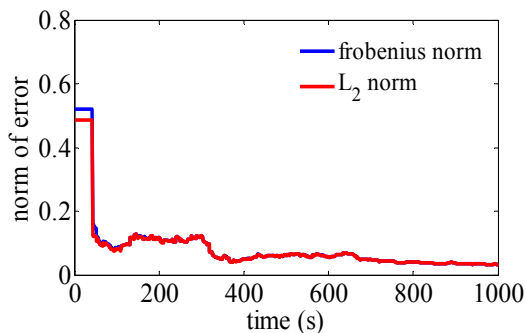
در الگوریتم (۲۱)، عملگر vec برای تبدیل ماتریس به بردار، و عملگر mat_n برای تبدیل بردار به ماتریس است که در معادلات (۲۲) نشان داده شده است.

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \text{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn} \quad (22)$$

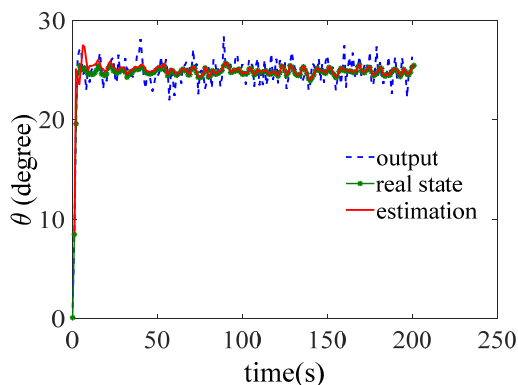
$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \text{mat}_n(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

با توجه به اینکه $\hat{A}_{uncertain}$ به عنوان معیار سنجش خطا، دارای ماهیت تصادفی است امکان دارد، در گام بعد $\|\hat{A}^{k+1} - \hat{A}_{uncertain}\|_{fro}$

مانند شکل ۱ دقیق است. مزیت دیگر روش فرا ابتکاری ارائه شده در این حالت، همگرایی سریع تر مدل تخمینی به پاسخ مسئله است. در شکل (۴) مقایسه نرم فروبنیوس و نرم ۲ الگوریتم Adaptive GMRES آنلاین فرا ابتکاری ارائه شده است.

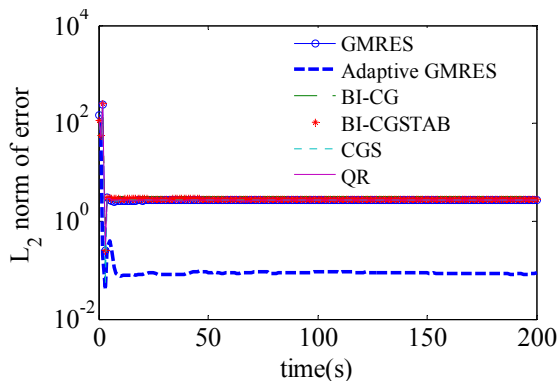


شکل ۴- نرم خطای تخمین روش Adaptive GMRES فرا ابتکاری در پاسخ به ورودی تصادفی برای مدل یک درجه



شکل ۵- پاسخ زاویه فراز مدل یک درجه با روش Adaptive GMRES تجربی به ورودی پله به همراه نویز

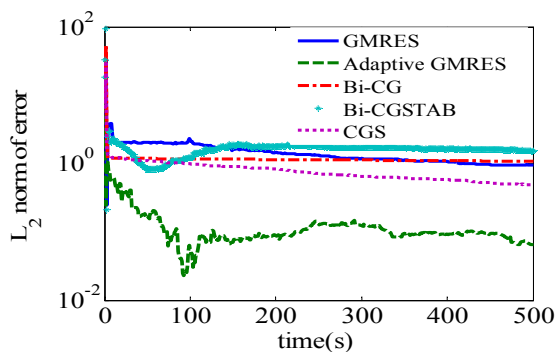
شکل (۶) مقایسه میزان نرم خطای روش Adaptive GMRES تجربی باروش های مختلف معمول در پاسخ به ورودی پله به علاوه نویز است.



شکل ۶- خطای تخمین روش های مختلف در پاسخ به ورودی پله به همراه نویز برای مدل یک درجه

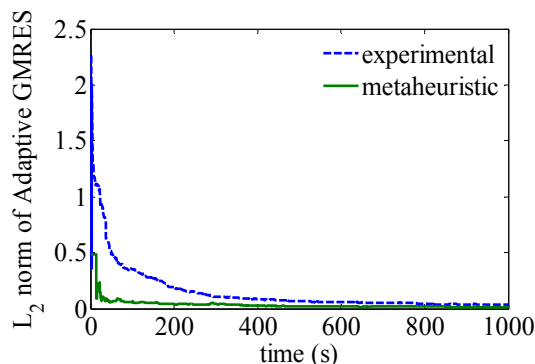
وضعیت، از نمودار نرم خطای تخمین مدل در شکل (۲) نیز مشخص است.

شکل (۲) مقایسه میزان نرم خطای الگوریتم تجربی با روش های مختلف ($e = \|\hat{A} - A\|_2$) در پاسخ به ورودی تصادفی با توزیع نرمال دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ را نشان می دهد.



شکل ۲- نرم خطای تخمین روش های مختلف در پاسخ به ورودی تصادفی برای مدل یک درجه

با در نظر گرفتن شکل های (۱) و (۲) مشاهده می شود که تخمین بسیار مناسبی از وضعیت فضاپیما انجام شده و نرم خطای تخمین مدل نیز بیش از ۱۰ برابر کاهش یافته است. نرم خطای روش Adaptive GMRES آنلاین فرا ابتکاری در مقایسه با روش تجربی برای مدل یک درجه در پاسخ به ورودی تصادفی با توزیع نرمال دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ در شکل (۳) ارائه شده است.

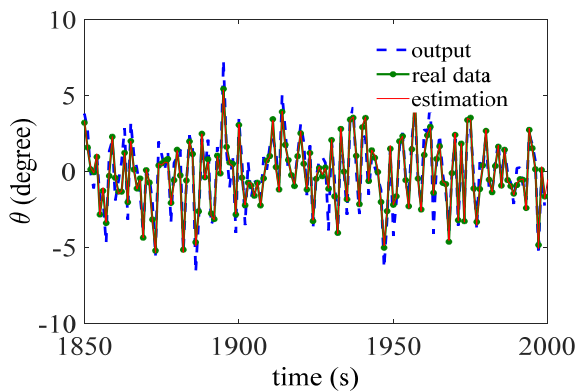


شکل ۳- نرم خطای تخمین روش Adaptive GMRES فرا ابتکاری تجربی برای ورودی تصادفی در مدل یک درجه

شکل (۳) نیز تأیید کننده عملکرد بسیار مناسب روش خودکار (روش آنلاین فرا ابتکاری) ارائه شده در تنظیم گام های الگوریتم حل است که جدول (۱) دقت بیشتر این روش آنلاین فرا ابتکاری را نسبت به روش تجربی در مدل یک درجه نشان می دهد. مشخص است که تخمین وضعیت با استفاده از مدل تخمینی با این روش نیز

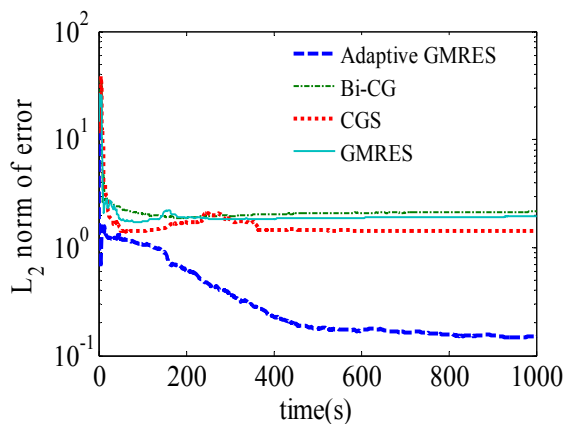
برای مدل دینامیک وضعیت فضاپیما با توجه به مرجع [۲۵] یک مدل سه درجه خطی باماتریس A فضای حالت 6×6 در نظر گرفته شد که ماتریس‌های فضای حالت آن در معادلات (۱۳) آمده است. برای نشان دادن کارایی روش مطرح شده مجدداً به میزان ۵۰ درصد نامعینی در ممان اینرسی فضاپیما اعمال شده و سپس مدل نامعین تخمین زده می‌شود.

شکل (۹)، پاسخ زاویه فراز سیستم سه درجه فضاپیما به ورودی تصادفی با توزیع نرمال دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ است.



شکل ۹- پاسخ زاویه فراز سیستم سه درجه تصادفی و تخمین انجام شده برای مدل سه درجه

شکل (۱۰)، مقایسه میزان نرم خطای روش تجربی با روش‌های مختلف ($e = \|\hat{A} - A\|_2$) در پاسخ به ورودی تصادفی است.

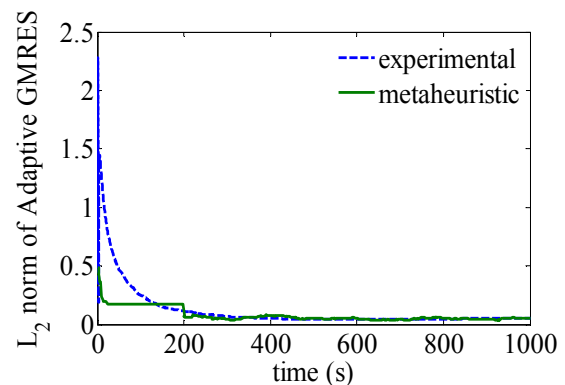


شکل ۱۰- خطای تخمین روش‌های مختلف در پاسخ به ورودی تصادفی برای مدل سه درجه

با در نظر گرفتن شکل‌های (۹) و (۱۰)، باز مؤثر بودن روش ارائه شده نشان داده می‌شود، هرچند همگرایی به سمت پاسخ زمان بیشتری برده است که به دلیل بزرگ بودن بردار تخمین می‌باشد که دارای ۳۶ المان است.

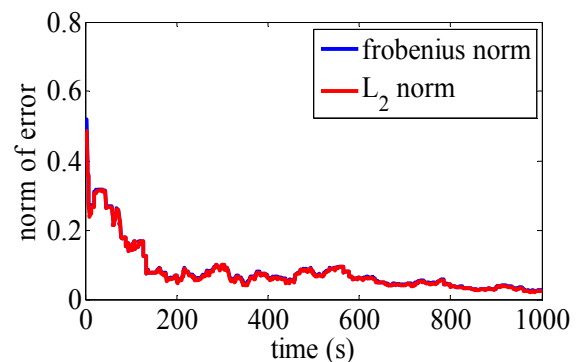
با توجه به شکل (۵) و شکل (۶) مجدد مشاهده می‌شود که تخمین مناسبی از وضعیت مدل صورت گرفته است و در تخمین مدل نیز خطای روش Adaptive GMRES نزدیک به حالت قبل است با این تفاوت که خطای سایر روش‌ها افزایش زیادی را نشان می‌دهد و این روش مقدار خطای تخمین مدل را بیش از ۱۰ برابر کاهش داده است.

نمودار نرم خطای روش آنلاین فرا ابتکاری در مقایسه با روش تجربی برای مدل یک درجه در پاسخ به ورودی پله به همراه ورودی تصادفی (میانگین ۰ و واریانس ۰/۱) در شکل (۷) ارائه شده است.



شکل ۷- نرم خطای تخمین روش Adaptive GMRES فرا ابتکاری و تجربی برای ورودی پله در مدل یک درجه

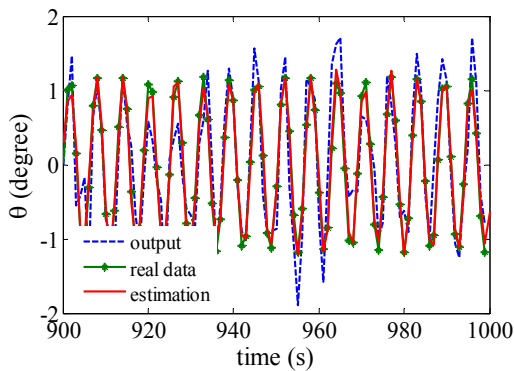
مطابق شکل (۷)، روش آنلاین فرا ابتکاری ارائه شده در پاسخ به ورودی پله هم پاسخ مناسبی داشته و هم برخلاف روش‌های معمول، همگرایی به پاسخ کلی را تضمین می‌کند. دقت حل دو روش تجربی و فرا ابتکاری در جدول (۱) نشان داده شده است که دقت تخمین در روش فرا ابتکاری کمی بیشتر از روش تجربی است. شکل (۸)، همگرایی نرم فروبنیوس و نرم ۲ ماتریس خطا را نشان می‌دهد.



شکل ۸- نرم خطای تخمین روش Adaptive GMRES فرا ابتکاری با ورودی پله به همراه نویز برای مدل یک درجه

برخی حالات خطای مدل تخمینی با این روش‌ها به ۱۹۵ درصد نیز می‌رسد.

برای نشان دادن کارایی بهتر روش Adaptive GMRES فراابتکاری، توانایی این روش در تخمین وضعیت و مدل در شرایط ورودی سینوسی به مدل نیز در شکل (۱۳) بررسی شده است.



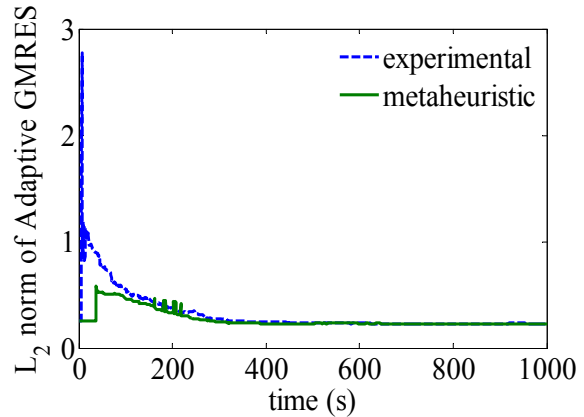
شکل ۱۳- پاسخ زاویه فرا سیستم به ورودی سینوسی و تخمین انجام شده برای مدل سه درجه

همانطور که از شکل (۱۳) مشخص است، در پاسخ به ورودی سینوسی نیز تخمین وضعیت و مدل فضاپیما به خوبی انجام شده است. در این وضعیت نیز نرم خطای نهایی تخمین مدل در شبیه‌سازی‌های مختلف بین ۹ تا ۱۶ درصد به دست آمد که نسبت به سایر روش‌ها دقت تخمین را بیش از ۱۰ برابر افزایش داده است. در جدول (۱)، برای مقایسه دقیق‌تر روش‌های ذکر شده درصد خطای نرم ۲ روش‌های ذکر شده بر اساس نوع ورودی و نوع مدل استفاده شده بیان شده است که رابطه محاسبه درصد خطا به صورت $e = 100 * \frac{\| \hat{A} - A \|_2}{\| A \|_2}$ است.

جدول ۱- نرم خطای روش‌های مختلف تخمین

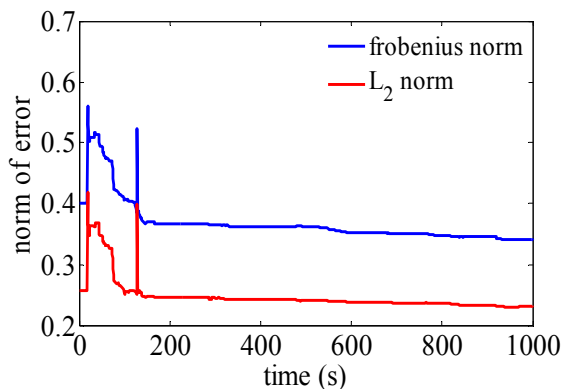
روش	درصد خطا مدل ورودی تصادفی یک درجه به	درصد خطا مدل ورودی پله یک درجه به	درصد خطا مدل ورودی تصادفی سه درجه به
GMRES	۷۹	۱۹۴	۸۲
BI_CG	۸۰	۱۹۵	۹۱
BI_CGSTAB	۱۱۵	۱۹۵	۸۹
CGS	۳۷	۱۹۴	۶۱
QR	۹۹	۱۹۵	۹۷
Offline Adaptive GMRES	۴-۸	۶-۹	۶-۱۵
Online Adaptive GMRES	۱-۴	۲-۵	۸-۱۶

نرم خطای روش Adaptive GMRES فرا ابتکاریو روش تجربی برای مدل سه درجه در پاسخ به ورودی تصادفی در شکل (۱۱) ارائه شده است.



شکل ۱۱- نرم خطای تخمین روش Adaptive GMRES فرا ابتکاری و تجربی برای ورودی تصادفی در مدل سه درجه

شکل (۱۱)، بیانگر مؤثر بودن روش Adaptive GMRES فراابتکاری توسعه داده شده در این مقاله است و در مدل سه درجه حتی سرعت همگرایی را نسبت به روش تجربی افزایش داده است و دقت تقریبی هر دو روش یکسان است. شکل (۱۲)، همگرایی دو نرم ۲ و نرم فروبنیوس ماتریس حالت مدل سه درجه را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲- نرم خطای تخمین روش Adaptive GMRES فرا ابتکاری در پاسخ به ورودی تصادفی برای مدل سه درجه

شکل (۱۲)، نشان دهنده بهبود تخمین انجام شده نسبت به شرایط اولیه A_0 است، هرچند همگرایی به صفر آهسته گردیده که دلیل این اتفاق بزرگ بودن بردار تخمین و زیاد بودن بهینه‌های محلی است ولی تخمین وضعیت به خوبی انجام شده استهرچند این نکته قابل ذکر است که با توجه به شکل (۱۰) مشخص است که سایر روش‌های تخمین از دقت بسیار کمی برخوردار هستند و در

در تخمین مدل فضاپیما و در نتیجه بهبود تخمین وضعیت نیز است. در روش فرا ابتکاری ارائه شده، گام‌های حل الگوریتم به صورت خودکار انتخاب می‌شود که در برخی حالت‌ها دقت حل این روش نسبت به روش تجربی بیشتر است. با توجه به اینکه نرم خطای روش Adaptive GMRES در حدود ۱ تا ۱۶ درصد نرم ماتریس فضای حالت فضاپیما است، و سایر روش‌ها دارای خطایی بیش از ۳۷ تا ۱۹۵ درصد هستند، پس با دقت بسیار مناسب، مدل تخمین زده شده در این روش، قابل استفاده در طراحی و کنترل فضاپیماست.

مراجع

- [1] Misra, G. "Halo Orbit Station-keeping using Nonlinear MPC and Polynomial Optimization," *AIAA space Flight Mechanics Meeting*, 2018, pp. 1-11.
- [2] Liu, C., Shi, K. and Wang, F., "Mass and Mass Center Identification of Target Satellite after Rendezvous and Docking," *Proceeding 11th World Congr. Intell. Control Autom.*, 2014, pp. 5802-5807.
- [3] Suo, M. and Chen, X., "Identification of Mass Characteristic Parameters for Spacecraft Based on Differential Evolution Algorithm," *Fifth International Conference Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC)*, 2015, pp. 1967-1971.
- [4] Xiaowei, D., Aiguo, W., Jun, D., and Kejie, Y., "Chaotic Synchronization and Parameter Identification of Fractional-order Dynamical Equation with Attitude of Spacecraft," *Chinese Control And Decision Conference CCDC - Aconf*, 2016, pp. 1456-1461.
- [5] Guoqiang, Y., Weiguang, L. and Hao, W., "Study of RBF Neural Network Based on PSO Algorithm in Nonlinear System," *8th International Conference Intelligence Computation Technology Automation*, No. 1, 2015, pp. 852-855.
- [6] Abrashov, S., Malti, R., Moreau, X., Moze, M., Aioun, F. and Guillemard, F., 2018. "Optimal input design for continuous-time system identification." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 60, 2018, pp. 92-99.
- [7] Meyer, C.D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Vol. 71. Siam, 2000.
- [8] Dehghan, M. and Hajarian, M., "Two algorithms for finding the Hermitian reflexive and skew-Hermitian solutions of Sylvester matrix equations," *Applied Mathematics Letters*, Vol. 24, No. 4, 2011, pp. 444-449.
- [9] Dehghan, M. and Hajarian, M., "Fourth-Order Variants of Newton's Method Without Second Derivatives for Solving Non-Linear Equations," *Engineering Computations*, Vol. 29 Issue: 4, 2012, pp. 356-365, <https://doi.org/10.1108/02644401211227590>
- [10] Hajarian, M., "Matrix Iterative Methods for Solving the Sylvester-Transpose and Periodic Sylvester Matrix Equations," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 350, No. 10, 2013, pp. 3328-3341.
- [11] Wang, D.Q., "Least Squares-Based Recursive and Iterative Estimation for Output Error Moving Average Systems Using Data Filtering," *IET Control Theory & Applications*, Vol. 5, No. 14, 2011, pp. 1648-1657, Doi:

در جدول (۱) منظور از روش Offline Adaptive GMRES همان الگوریتم کمترین باقیمانده تعمیم یافته تطبیقی تجربی و Online Adaptive GMRES، الگوریتم آنالاین فرا ابتکاری کمترین باقیمانده تعمیم یافته تطبیقی است. جدول (۱)، توانایی روش Adaptive GMRES، نسبت به سایر روش‌ها بهتر نشان می‌دهد، زیرا خطای تخمین روش Adaptive GMRES تجربی در حدود ۴ تا ۱۵ درصد و در روش فرا ابتکاری حدود ۱ تا ۱۶ درصد است. دلیل وجود یک بازه خطا برای روش تخمین معرفی شده، وجود نویز در خروجی حسگرهای وضعیت است. خطای سایر روش‌ها از ۳۷ تا ۱۹۵ درصد متغیر است که این عدم دقت در تخمین مدل، باعث ایجاد خطا در فیلتر کالمن و عدم دقت تخمین وضعیت نیز می‌شود. همچنین دقت بالای مدل تخمین در روش Adaptive GMRES باعث می‌شود که پارامترهای اصلی کنترل وضعیت مانند ممان اینرسی‌ها به خوبی تخمین زده شوند که قابلیت اصلاح کنترل کننده را فراهم می‌کند. در مقایسه دو روش تجربی و فرا ابتکاری ارائه شده، مشاهده می‌شود در حالتی که از دینامیک یک درجه آزادی استفاده شده است چون بردار تخمین کوچک است، روش خودکار پاسخ بهتری داشته است. وقتی در مدل سه درجه آزادی بردار تخمین بزرگ‌تر می‌شود به دلیل وجود بهینه‌های محلی متعدد، دقت روش تجربی اندکی بیشتر است که احتمالاً با افزایش هوشمندی روش فرا ابتکاری ارائه شده این موضوع قابل حل باشد.

نتیجه گیری

با توجه به وجود نامعینی در دینامیک فضاپیما و نویز موجود در حسگرهای وضعیت، جهت انجام تخمین هم‌زمان مدل فضاپیما و متغیرهای حالت، از یک روش آنالاین فرا ابتکاری تکرار شونده استفاده می‌شود. این الگوریتم شامل ترکیب هم‌زمان تخمین مدل با استفاده از روش کمترین مربعات خطا، تخمین وضعیت با استفاده از فیلتر کالمن و حل دستگاه ماتریسی نهایی به وسیله یک الگوریتم آنالاین فرا ابتکاری جدید است. تمرکز روش ارائه شده، بر روی الگوریتم حل دستگاه ماتریسی حاصل از روش کمترین مربعات خطا و تأثیر آن بر تخمین مدل و وضعیت فضاپیماست. الگوریتم نوین معرفی شده در این مقاله، الگوریتم آنالاین فرا ابتکاری کمترین مربعات باقیمانده تعمیم یافته تطبیقی (Adaptive GMRES) است، که با توجه به شرایط دینامیکی مدل، گام‌های حل در آن تنظیم می‌گردد. گام‌های حل مسئله تخمین در زیر فضای کرلیف یا با استفاده از یک روش تجربی یا از یک روش آنالاین فرا ابتکاری نوین تنظیم می‌گردد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها بیانگر دقت بسیار بالای این دو روش

- [19] Panjeh, F., Beik, A. and Khojasteh, D., "Weighted Versions of GI FOM and GI GMRES for Solving General Coupled Linear Matrix Equations," *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. 55, No. 10, 2015, pp. 1606–1607.
- [20] Sosonkina, M., Watson, L. T. and Kapania, R. K., "A New Adaptive GMRES Algorithm for Achieving High Accuracy," *Numerical linear algebra with applications*, Vol. 5, No. 4, 1998, pp. 275–297.
- [21] Zhong, H.X. and Gu, X.M., "A Flexible and Adaptive Simpler GMRES with Deflated Restarting for Shifted Linear Systems." *Computers & Mathematics with Applications*, 2019.
- [22] Núñez, R.C., Schaerer, C.E. and Bhaya, A., "A Proportional-Derivative Control Strategy for Restarting the GMRES (m) Algorithm." *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 337, 2018, pp. 209–224.
- [23] Sidi, M.J., *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, Cambridge university press, 1997.
- [24] Garcia, S. G., Rubio, R. G., Bretones A. R. and Lopez, R. G., "Revisiting the Stability of Crank–Nicolson and ADI-FDTD," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 55, No. 11, Nov. 2007, pp. 3199–3203.
- [25] Baolong, Zhu, et al., "Prediction-Based Sampled-Data H_∞ Controller Design for Attitude Stabilisation of a Rigid Spacecraft with Disturbances." *International Journal of Systems Science*, Vol. 48, No. 11, 2017, pp. 2356–2367.
- 10.1049/iet-cta.2010.0416
- [12] Zhang, Hui, Yang, Shi and Junmin, Wang, "Observer-Based Tracking Controller Design for Networked Predictive Control Systems with Uncertain Markov Delays," *International Journal of Control*, Vol. 86, No. 10, 2013, pp. 1824–1836, Doi: 10.1080/00207179.2013.797107.
- [13] Grothe, O., "A Higher Order Correlation Unscented Kalman filter," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 219, No. 17, 2013, pp. 9033–9042
- [14] Ciucci, F., "Revisiting Parameter Identification in Electrochemical Impedance Spectroscopy: Weighted Least Squares and Optimal Experimental Design," *Electrochimica Acta*, Vol. 87, 2013, pp. 532–545.
- [15] Wang, C. and Tang, T., "Recursive Least Squares Estimation Elgorithm Applied to a Class of Linear-in-Parameters Output Error Moving Average Systems," *Applied Mathematics Letters*, Vol. 29, 2014, pp. 36–41.
- [16] Hu, Y.B., Liu, B.L., Zhou, Q. and Yang, C. "Recursive Extended Least Squares Parameter Estimation for Wiener Nonlinear Systems with Moving Average Noises," *Circuits, Systems and Signal Processing*, Vol. 33, No. 2, 2014, pp. 655–664.
- [17] Ding, F., Wang, Y.J. and Ding, J., "Recursive Least Squares Parameter Estimation Algorithms for Systems with Colored Noise Using the Filtering Technique," *Digital Signal Processing*, Vol. 37, 2015, pp. 100–108
- [18] Ma, X. and Ding, F., "Recursive and Iterative Least Squares Parameter Estimation Algorithms for Observability Canonical State Space Systems," *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 352, No. 1, 2015, pp. 248–258.