

# Optimal Control Procedure for Calculating a Typical Lunch Vehicle Trajectory Based on Maximizing Payload

S. Shahmirzai Jashoghani<sup>1\*</sup> and M. Nosratollahi<sup>2</sup>

1. Faculty of Engineering, University Azad Republic

2. Faculty of Aerospace Engineering, University Shahid Beheshti

\*University Azad Republic Squire, Garmsar, IRAN

**shahmirzaee2000@yahoo.com**

*In this research optimal trajectory of lunch vehicle based on maximizing payload is being attended. At first, motion of missile concluding modeling of environment, atmosphere, gravity, mass, motion equations and aerodynamic coefficients would be simulated. Then procedure of an optimized design by using optimal control theory would be described. Applying variational calculus and mathematical modeling of optimization problems would lead project to a two point boundary condition problem which would be solved by numerical solutions such as steepest descent. At last a code would be generated in which optimal trajectory of missile calculated by using indirect optimal control and steepest descent numerical solution.*

*An interesting point in this article is that some variables are used both as state and control variables. Hence state control variables here are divided to two groups, slow state variables concluding ones which are only state variables, and fast state variables concluding ones which are both state variables and control variables simultaneously. Solution for such control problems is described here.*

**Keywords:** Optimal control theory, multi stage lunch vehicle, pitch program, fast state variable, slow state variable

---

1. Instructor (Corresponding Author)

2. Assistant Professor

## گزارش فنی

# روش کنترل بهینه برای تعیین مسیر بهینه موشک ماهواره‌بر، بر پایه جرم بار محموله ماکزیمم

صدیقه شاه‌میرزائی جشوقانی<sup>۱\*</sup>، مهران نصرت‌اللهی<sup>۲</sup>

۱- دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی

۲- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی

\* گرمسار، میدان دانشگاه آزاد اسلامی

shahmirzaee2000@yahoo.com

در این مقاله، سعی شده است به روش‌هایی برای یافتن مسیر بهینه موشک ماهواره‌بر با هدف بیشینه‌سازی بار محموله بپردازیم. در ابتدا حرکت موشک به صورت کامل مدل‌سازی می‌شود. این مدل‌سازی شامل مدل‌سازی محیط، اتمسفر، جاذبه و شکل زمین، مدل‌سازی جرمی، مدل‌سازی معادلات حرکت و در نهایت مدل‌سازی ضرایب ایرودینامیکی موشک است. سپس مراحل تدوین یک روش طراحی بهینه به کمک تئوری کنترل بهینه شرح داده می‌شود. با استفاده از حساب تغییرات، مدل‌سازی ریاضی مسائل بهینه‌سازی، منجر به خلق یک مسئله شرایط مرزی دو نقطه‌ای مجزا می‌شود و برای حل آن از روش‌های عددی و از جمله روش سریع‌ترین سقوط استفاده می‌شود. در نهایت نرم‌افزاری تهیه شده است که در آن با استفاده از روش غیرمستقیم کنترل بهینه و حل عددی سریع‌ترین سقوط، مسیر بهینه موشک ماهواره‌بر، تعیین می‌شود. یکی از شرایط جالب توجه در این مقاله، آن است که تعدادی از متغیرها هم متغیر حالت و هم کنترل ظاهر شده‌اند. بنابراین در این‌جا متغیرهای حالت به دو دسته متغیرهای حالت، شامل متغیرهایی که فقط متغیر حالتند و متغیرهای حالت سریع شامل متغیرهایی که هم متغیر حالت و هم متغیر کنترلی‌اند، تقسیم می‌شوند. حل این نوع مسئله کنترل بهینه در این مقاله ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تئوری کنترل بهینه، موشک ماهواره‌بر چندمرحله‌ای، برنامه پیچ، متغیر حالت سریع، متغیر حالت کند.

$R_p$   
 $\Gamma$   
 $T$   
 $T_{vac}$   
 $V$   
 $\phi$   
 $\varphi$   
 $\theta$   
 $\delta$

شعاع زمین در قطب‌ها  
شعاع حامل موشک  
پیشرانش  
پیشرانش خلا  
سرعت  
عرض جغرافیایی  
زاویه قطبی  
زاویه مسیر  
زاویه پیچ  
زاویه گیم‌بال

$D$   
 $e$   
 $g_0$   
 $h$   
 $I_{sp}$   
 $I_{yy}$   
 $I$   
 $M$   
 $m$   
 $q$   
 $R_e$

## فهرست علائم

پسا  
خروج از مرکزیت بیضی  
شتاب جاذبه در سطح زمین  
ارتفاع ژئوپتانسیل  
ضربه ویژه  
ممان اینرسی لحظه‌ای در راستای محور  $y$   
فاصله بین مرکز جرم لحظه‌ای موشک و نقطه اثر پیشرانش  
گشتاور پیچ  
جرم  
نرخ تغییرات زاویه پیچ  
شعاع زمین در استوا

## مقدمه

یکی از مراحل مهم در طراحی موشک‌های ماهواره‌بر، طراحی برنامه زاویه پیچ و در واقع یافتن مسیر بهینه است. در بسیاری از اوقات

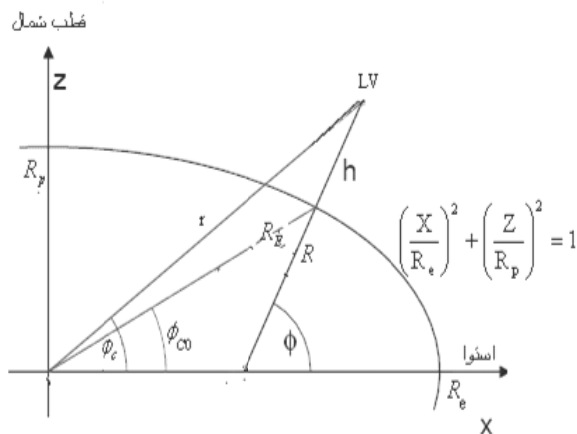
۱. مربی

۲. استادیار

با توجه به مدل زمین و بر اساس رابطه (۲) شتاب جاذبه از رابطه (۳) حاصل می‌شود.

$$g = g_0 \frac{R_e^2 (1 - \text{esin}^2 \phi)^2}{(R_e (1 - \text{esin}^2 \phi) + h)^2} \quad (3)$$

رابطه (۳) نشان‌دهنده این موضوع است که شتاب گرانش در ارتفاع  $h$  تابعی از عرض جغرافیایی است که البته این به دلیل وابستگی شعاع زمین به عرض جغرافیایی است. همچنین در رابطه (۳)،  $h$  ارتفاع ژئوپتانسیل،  $R_e$  شعاع زمین و  $g_0$  شتاب جاذبه در سطح زمین است. نکته مهم در رابطه (۳)، نحوه محاسبه ارتفاع ژئوپتانسیل است؛ اگر چنانچه مدل زمین کروی باشد؛ مماس بر سطح زمین در همه جا بر شعاع زمین عمود است بنابراین ارتفاع هندسی و ارتفاع ژئوپتانسیل یکسان خواهند بود. اما در مورد مدل بیضوی، وضعیت متفاوت است و ارتفاع ژئوپتانسیل را باید به دست آورد.



شکل ۱- بیضی مرجع به عنوان مدل زمین

به منظور محاسبه ارتفاع ژئوپتانسیل، کافیتست که فاصله موشک از خط مماس بر سطح زمین بیضوی به دست آید؛ بنابراین ابتدا، شیب مماس بر سطح زمین بیضوی محاسبه می‌شود و سپس معادله خطی‌ای که موشک را به سطح زمین متصل می‌کند و از سوی دیگر عمود بر مماس بر سطح زمین است محاسبه می‌شود؛ با حل همزمان معادله بیضی و معادله این خط عمود، نقطه تقاطع که در واقع نقطه پای عمود موشک است  $(X_0, Y_0, Z_0)$ ، به دست می‌آید. (معمولاً برای حل چنین دستگاه معادلاتی، نیاز به استفاده از روش‌های عددی است که در این مقاله از روش سایدل<sup>۳</sup> استفاده شده است).

بر اساس معیارهایی از قبیل کم‌ترین مصرف سوخت، کم‌ترین جرم اولیه موشک یا ماکزیمم بار محموله قابل حمل توسط موشک، مسیر موشک تعیین می‌شود. آنچه هدف این مقاله است؛ معرفی یک فرایند خودکار، برای تعیین برنامه پیچ، بر اساس معیار ماکزیمم‌سازی بار محموله است.

فرایند بهینه‌سازی شامل یافتن بهترین مسیر با هدف یا اهداف خاص است. مسئله بهینه‌سازی مسیری، به دنبال یافتن تاریخچه کنترل مناسب است که تحت آن، تابع هدف خاص، با معادلات دیفرانسیلی حرکت بهینه می‌شود. در این مقاله، مسیر بهینه موشک ماهواره‌بر با هدف بهینه‌سازی بار محموله، با استفاده از روش‌های کنترل بهینه به دست آمده است.

## مدل‌سازی حرکت

مدل‌سازی کامل حرکت یک موشک، به چهار قسمت تقسیم می‌شود؛ ۱- مدل‌سازی محیط شامل مدل‌سازی اتمسفر، جاذبه و شکل زمین؛ ۲- مدل‌سازی جرمی؛ ۳- مدل‌سازی معادلات حرکت و ۴- مدل‌سازی ضرایب آیرودینامیکی موشک.

با توجه به تأثیری که شرایط اتمسفر بر روی پیشرانش و نیروهای آیرودینامیکی دارد؛ لازم است تا در طی زمان کارکرد موشک- بسته به ارتفاع لحظه‌ای موشک- فشار و چگالی اتمسفر محاسبه شود. در این مقاله، با توجه به قوانینی که بین فشار، دما و چگالی با ارتفاع حاکم است، اتمسفر استاندارد شبیه‌سازی شده است [۱].

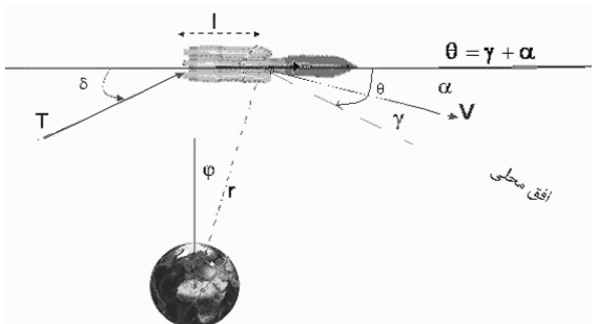
به علت وجود نیروهای گریز از مرکز، زمین با چرخش شبانه‌روزی حول خودش، دیگر نمی‌تواند کره‌ای کامل باشد و لذا کره‌ای خواهد بود که در دو قطب پهن و در استوا برآمده است و با این تفاسیر، مدل بیضی‌گون چرخان با توزیع جرم یکنواخت، با دقت‌ترین مدل از زمین است که در این تحقیق از آن استفاده شده است. (رابطه (۱)). همچنین از مدل زمین بیضوی با توزیع جرم یکنواخت، استفاده شده است [۲].

$$\left(\frac{X}{R_e}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R_p}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $(R_e)$  شعاع زمین در استوا  $۶۳۷۸/۳۸۸$  کیلومتر و  $(R_p)$  شعاع زمین در قطب‌ها،  $۶۳۵۶/۹۱۲$  کیلومتر است. اگر  $R$  فاصله بین مرکز زمین و نقطه‌ای روی زمین بیضی‌گون با عرض جغرافیایی  $\phi$  باشد (شکل (۱))، می‌توان  $R$  را از رابطه (۲) به دست آورد که خطای آن کمتر از  $۰/۱$  کیلومتر است. در رابطه (۲)،  $e$  خروج از مرکزیت بیضی است.

$$R = R_e (1 - \text{esin}^2 \phi) \quad (2)$$

مرکز جرم لحظه‌ای موشک و نقطه اثر نیروی پیشرانش هستند. این متغیرها در شکل (۲) نشان داده شده‌اند:



شکل ۲- نمایش نیروها و زوایای مورد نیاز در معادله حرکت

### بهینه‌سازی

مسائل برنامه‌ریزی بهینه در سیستم‌های دینامیکی شامل مسائل کنترل بهینه هستند. دو روش عمده برای رویارویی با این مسئله وجود دارد؛ برنامه‌ریزی پویای بلمن و دیگری استفاده از حساب تغییرات. در این تحقیق از روش دوم استفاده شده است.

مسئله عبارتست از یافتن کنترل قابل قبول و بهینه  $u^*(t) \in R^m$  که باعث شود تا سیستمی با رابطه (۶)، با طی یک منحنی مسیر قابل قبول  $X^*$  تابع معیار سیستم را که به صورت معادله (۷) است، حداقل کند [۶].

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) & t_0 \leq t \leq t_f \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6)$$

$$J = h[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} g[x(t), u(t), t] dt \quad (7)$$

در معادلات بالا،  $J$  شاخص کارایی یا تابع هزینه و همان تابع معیار سیستم است که به صورت اسکالر است،  $x(t)$  تابع برداری با  $n$  مؤلفه است ( $x(t) \in R^n$ ) که بردار حالت نامیده می‌شود. همچنین  $u(t)$  فرمان کنترل است که یک تابع برداری با  $m$  مؤلفه ( $u(t) \in R^m$ ) است و  $t_0, t_f$  به ترتیب معرف زمان نهایی و اولیه هستند. در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی، زمان نهایی آزاد است. البته ذکر این نکته ضروری است که آنچه بیان شد، در صورت عدم وجود محدودیت بر روی بردار کنترل و حالت است.

با توجه به روش حساب تغییرات، تابع هامیلتونی به صورت معادله (۸) تعریف می‌شود [۶]:

اینک با استفاده از روابط هندسی که فاصله دو نقطه را محاسبه می‌کنند، فاصله نقطه پای عمود موشک  $(x_0, y_0, z_0)$  و موشک  $(x_m, y_m, z_m)$  به دست می‌آید که همان ارتفاع ژئوپتانسیل است.

$$h_G = \sqrt{(X_m - X_0)^2 + (y_m - y_0)^2 + (Z_m - Z_0)^2} \quad (4)$$

با گذشت زمان، به علت مصرف سوخت، تغییرات زیادی در جرم، مرکز جرم و گشتاور اینرسی به وجود می‌آید. در هنگام سوزش سوخت، جرم موشک در هر لحظه رو به زوال گذاشته و از طرفی توزیع جرمی آن نیز دستخوش تغییرات می‌شود؛ بنابراین مرکز جرم و ممان‌های اینرسی آن دائماً در حال تغییرند، در این مقاله از راه کار مرجع [۳] برای محاسبه مرکز جرم و ممان‌های اینرسی لحظه‌ای استفاده شده است.

همچنین، برای محاسبه ضرایب آیرودینامیک موشک از راهکار مرجع [۳] و نرم افزار میسایل داتکام استفاده شده است که در این جا به طور خلاصه به آن اشاره می‌شود: در ابتدا پارامترهای مورد نیاز نرم افزار میسایل داتکام نظیر مرکز جرم، طول، قطر و بالک‌های (در صورت وجود) موشک و ... بارگذاری می‌شود و ضرایب آیرودینامیک برای ماخ‌ها و زوایای حمله متفاوت (در این مقاله برای ۱۰ زاویه حمله و ۶ عدد ماخ متفاوت) به دست می‌آید. سپس در هنگام شبیه‌سازی، با توجه به عدد ماخ و زاویه حمله جاری موشک و با ضرایب به دست آمده برای دیگر زوایا و اعداد ماخ، درون‌یابی صورت گرفته و ضرایب برای حالت جاری موشک به دست می‌آید.

پس از آن، معادلات حرکت موشک، با فرض زمین غیرچرخشی و حرکت موشک در صفحه، به صورت مجموعه معادلات رابطه (۵) نشان داده می‌شوند [۴ و ۵]:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{V \cdot \cos \gamma}{r} \\ \dot{r} = V \cdot \sin \gamma \\ \dot{V} = \frac{T \cos(\theta - \gamma + \delta) - D}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} = \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta) + L}{mV} + \left( \frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma \\ \dot{\theta} = q + \frac{V \cdot \cos \gamma}{r} \\ \dot{q} = \frac{M - T l \sin \delta}{I_{yy}} \end{cases} \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $\varphi$  زاویه قطبی،  $\gamma$  زاویه مسیر،  $V$  سرعت،  $T$  پیشرانش،  $\theta$  زاویه پیچ،  $\delta$  زاویه گیم‌بال،  $D$  پسا،  $m$  جرم،  $r$  شعاع حامل موشک،  $q$  نرخ تغییرات زاویه پیچ،  $M$  گشتاور پیچ،  $I_{yy}$  ممان اینرسی لحظه‌ای در راستای محور  $y$  و  $l$  فاصله بین

یکی از مهم‌ترین و اساسی‌ترین کارها در مسائل بهینه‌سازی، انتخاب تابع هزینه است. در این تحقیق، هدف بیشینه‌کردن جرم نهایی است؛ بنابراین تابع  $J$  به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود در این صورت  $g(x, u, t)$  برابر صفر و  $h(x, u, t) = -m(t_f)$  هستند.

$$J = -m(t_f) \quad (۱۳)$$

### معادلات کمک حالت

در قسمت قبل، بردار حالت و بردار کنترل مشخص شدند. در این قسمت با توجه به رابطه (۸) تابع همیلتونی تشکیل می‌شود:

$$\begin{cases} H(\lambda_x, \lambda_y, x, y, u, t) = \lambda_x^T f(x, y, u, t) + \lambda_y^T G(x, y, u, t) \\ H = \lambda_\phi \dot{\phi} + \lambda_r \dot{r} + \lambda_v \dot{V} + \lambda_\gamma \dot{\gamma} + \lambda_m \dot{m} + \lambda_\theta \dot{\theta} + \lambda_q \dot{q} \end{cases} \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴)،  $\dot{\phi}, \dot{r}, \dot{V}, \dot{\gamma}, \dot{m}, \dot{\theta}, \dot{q}$  از مجموعه معادلات (۵) جایگزین می‌شوند. اینک با توجه به معادله اول از رابطه (۱۰)، معادلات دیفرانسیلی کمک حالت به دست می‌آید:

$$\dot{\lambda}_x^T = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_x^T \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_y^T \frac{\partial G}{\partial x} \quad (۱۵)$$

و بنابراین:

$$\dot{\lambda}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = & \lambda_\phi \left[ \frac{V \cdot \cos \gamma}{r^2} \right] - \lambda_v \left[ \frac{T_r \cos(\theta - \gamma + \delta) - D_r}{m} + \mu \frac{2 \sin \gamma}{r^2} \right] \\ & - \lambda_\gamma \left[ \frac{T_r \sin(\theta - \gamma + \delta) + L_r}{mV} + \left( -\frac{V}{r^2} + \frac{2\mu}{Vr^3} \right) \cos \gamma \right] \\ & - \lambda_q \left[ \frac{M_r - T_r I \sin \delta}{I_{yy}} \right] \end{aligned} \quad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_v = -\frac{\partial H}{\partial V} = & -\lambda_r \left[ \sin \gamma \right] - \lambda_\phi \left[ \frac{\cos \gamma}{r} \right] + \lambda_v \left[ \frac{D_v}{m} \right] \\ & + \lambda_\gamma \left[ \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta) + L}{mV^2} - \frac{L_v}{mV} - \left( \frac{1}{r} + \frac{\mu}{V^2 r^2} \right) \cos \gamma \right] \\ & - \lambda_q \left[ \frac{M_v}{I_{yy}} \right] \end{aligned} \quad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_\gamma = -\frac{\partial H}{\partial \gamma} = & -\lambda_r \left[ V \cdot \cos \gamma \right] + \lambda_\phi \left[ \frac{V \sin \gamma}{r} \right] - \lambda_v \left[ \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta) - D_r}{m} - \mu \frac{\cos \gamma}{r^2} \right] \\ & + \lambda_\gamma \left[ \frac{T \cos(\theta - \gamma + \delta) + L_\gamma}{mV} + \left( \frac{V}{r} - \frac{\mu}{Vr^2} \right) \sin \gamma \right] - \lambda_q \left[ \frac{M_\gamma}{I_{yy}} \right] \end{aligned} \quad (۱۹)$$

$$H = g(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t) \quad (۸)$$

در رابطه (۸)،  $\lambda(t) \in R^n$  هستند و به آن‌ها متغیرهای کمک حالت یا ضرایب لاگرانژ گفته می‌شود. در این صورت تابع هزینه را می‌توان به صورت معادله (۹) بازنویسی کرد [۶]:

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (H - \lambda^T \dot{x}) dt \quad (۹)$$

برای مینیمم‌سازی تابع  $J$ ، لازم است که تابع همیلتونی مینیمم شود. معمولاً زمان اولیه و مقادیر متغیرهای حالت در زمان اولیه مشخص است. به طور خلاصه مجموعه شرایط لازم به صورت مجموعه روابط (۱۰) بیان می‌شوند [۶]:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^*(t) = -\left( \frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right)^T \\ \dot{x}^*(t) = \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right)^T \\ \left( \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right) = 0 \\ \left( \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right)^T \delta x_f + \\ \left[ H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \end{cases} \quad (۱۰)$$

در تمام روابط بالا، متغیرهای حالت و کنترل که با \* نشان داده شده‌اند نشان‌دهنده متغیر حالت و کنترل در حالت بهینه هستند. با توجه به انتخاب روش استفاده از حساب تغییرات، اینک در این قسمت، با توجه به مجموعه معادلات (۵)، مسئله به فرم مورد نظر در مسائل کنترل بهینه بیان می‌شود. ضمن اینکه معادله دیگری که تغییرات جرم را در نظر می‌گیرد، به مجموعه معادلات (۵) اضافه می‌شود.

$$\dot{m} = \frac{c}{I_{sp} g_0} T_{vac} \quad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱)،  $c$  تعداد موتور،  $I_{sp}$  ضریب ویژه و  $T_{vac}$  پیشرانش خلأ هستند. اگر چنانچه مجموعه معادلات (۵) و معادله (۱۱) به عنوان معادلات دیفرانسیل و  $\delta, \theta, q$  به عنوان متغیرهای کنترل در نظر گرفته شوند، مشاهده می‌شود که  $\theta, q$  هم به عنوان متغیر حالت و هم کنترل ظاهر شده‌اند. بنابراین در این جا متغیرهای حالت به دو دسته متغیرهای حالت کند، شامل متغیرهای  $\phi, r, V, \gamma, m$  و متغیرهای حالت سریع شامل  $\theta, q$  تقسیم می‌شوند [۴] و بنابراین:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, u, t) \rightarrow x = [\phi, r, V, \gamma, m]^T \\ G(x, y, u, t) = 0 \rightarrow y = [\theta, q, \delta]^T \end{cases} \quad (۱۲)$$

در معادلات بالا در هر نقطه از مسیر باید مقادیر  $\lambda_\theta, \lambda_q, \delta, \theta$  محاسبه شوند، لذا به معادلاتی اضافه نیاز است که با توجه به رابطه جبری  $G(x, y, u, t) = 0$  به شرح ذیل به دست می‌آیند:

$$G_1 = q = 0 \quad (27)$$

$$G_2 = \frac{M - T \sin \delta}{I_{yy}} = 0 \quad (28)$$

بنابراین ابتدا معادله (۲۷) حل می‌شود؛ سپس معادلات (۲۴)، (۲۶) و (۲۸) به طریق عددی حل شده و  $\theta, \delta, \lambda_q$  به دست می‌آیند و در نهایت معادله (۲۵) حل می‌شود و  $\lambda_\theta$  حاصل می‌شود.

### شرایط اولیه

معمولاً شرایط اولیه در مسائل کنترل بهینه از شرایط اولیه موشک به دست می‌آیند. در حالت کلی زمان اولیه برای شروع محاسبات بهینه‌سازی، انتهای فاز پرواز عمودی است. با توجه به این که در این فاز، معادلات حرکت موشک کاملاً مشخص هستند، با انتگرال‌گیری از معادلات (۵) می‌توان شرایط را در پایان فاز عمودی پرتاب محاسبه کرد و شرایط اولیه را منطبق بر مقادیر متغیرهای حالت در پایان فاز عمودی در نظر گرفت. البته علت اصلی این کار این است که درست در لحظه بلندشدن موشک، سرعت موشک صفر است و لذا معادله  $\dot{\gamma}$  دچار تکینگی می‌شود. برای رفع این مشکل می‌توان سرعت اولیه موشک را به جای صفر، برابر اثر چرخش زمین در سرعت موشک فرض کرد. در نهایت شرایط اولیه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 0 \text{ deg} \\ r_0 = 6378833 \text{ m} \\ V_0 = R_e \omega_e \cos \phi_e \text{ m/s} \\ \gamma_0 = 89 \text{ deg} \\ m_0 = M_0 \\ \theta_0 = 89 \text{ deg} \\ q_0 = -\frac{V_0 \cos \gamma_0}{r_0} \text{ rad/s} \end{array} \right. \quad (29)$$

### شرایط جدایش

با توجه به مجموعه معادلات (۵)، برخی از متغیرها در جریان جدایش بوستر یا مراحل اول و دوم موشک تغییر می‌کند و در آن‌ها گسستگی مشاهده می‌شود و به عبارت بهتر رژیم آن‌ها تغییر می‌کند. این متغیرها عبارتند از جرم، ممان اینرسی، پیشران‌ها، تعداد موتور و ضرایب آیرودینامیکی که در محاسبه نیروها و گشتاور آیرودینامیکی به کار می‌روند. بنابراین در هنگام تغییر مرحله و زمان جدایش‌ها، باید

$$\lambda_m^* = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_v \left[ \frac{T \cos(\theta - \gamma + \delta) - D}{m^2} \right] + \lambda_\gamma \left[ \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta) + L}{m^2 V} \right] + \lambda_q \left[ I_{yy} \left( \frac{M - T \sin \delta}{I_{yy}^2} \right) \right] \quad (20)$$

برای حل معادلات دیفرانسیل کمک حالت؛  $\lambda_q, \lambda_\theta$  نیز دیده می‌شوند و از سوی دیگر حالت دیفرانسیلی آن‌ها موجود نیست؛ برای رفع این مشکل کفایت تا این پارامترها برحسب متغیرهای کمک حالت نوشته و در معادلات دیفرانسیل کمک حالت جایگزین شوند:

$$\lambda_q = \left[ \frac{M_\theta}{I_{yy}} \right]^{-1} \left( \lambda_v \left[ \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta) + D_\theta}{m} \right] - \lambda_\gamma \left[ \frac{T \cos(\theta - \gamma + \delta) + L_\theta}{mV} \right] \right) \quad (21)$$

$$\lambda_\theta = -\lambda_q \left[ \frac{M_q}{I_{yy}} \right] \quad (22)$$

روابط (۲۱) و (۲۲) بر اساس رابطه (۲۳) به دست آمده‌اند.

مقادیر متغیرهای کنترل در طول مسیر باید محاسبه شوند. متغیرهای کنترل با توجه به معادله سوم از رابطه (۱۰) به شکل رابطه (۲۳) بیان می‌شوند و در نهایت با استفاده از رابطه (۲۳) به دست می‌آیند؛ لذا متغیرهای کنترلی  $\theta, q, \delta$  باید معادلات (۲۶-۲۴) را ارضا کنند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial y} = \lambda_x^T \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_y^T \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_x^T \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda_y^T \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

توجه شود که در این جا متغیرهای حالت سریع به عنوان متغیرهای کنترل هستند:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\lambda_v \left[ \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta) + D_\theta}{m} \right] + \lambda_\gamma \left[ \frac{T \cos(\theta - \gamma + \delta) + L_\theta}{mV} \right] + \lambda_q \left[ \frac{M_\theta}{I_{yy}} \right] = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \lambda_\theta + \lambda_q \left[ \frac{M_q}{I_{yy}} \right] = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \delta} = -\lambda_v \left[ \frac{T \sin(\theta - \gamma + \delta)}{m} \right] + \lambda_\gamma \left[ \frac{T \cos(\theta - \gamma + \delta)}{mV} \right] - \lambda_q \left[ \frac{T \cos \delta}{I_{yy}} \right] = 0 \quad (26)$$

مقادیر به‌روز شده این متغیرها در معادلات جایگزین شوند.

### شرایط نهایی

هدف از پرتاب، قراردادن بار محموله در یک مدار مشخص با ارتفاع مشخص است. در این تحقیق، هدف، قراردادن بار در یک مدار دایروی است؛ یعنی مداری با خروج از مرکز بیضوی صفر. اما در این قسمت با فرض اینکه مدار هدف، مدار انتقالی بیضوی باشد، به بررسی موضوع می‌پردازیم؛ پرواضح است که مدار دایروی حالت خاصی از مدار بیضوی است و شرایط مدار بیضوی، مدار دایروی را نیز شامل می‌شود.

برای قرارگیری موشک در نقطه حضيض مدار، در زمان نهایی باید زاویه مسیر برابر صفر شود. چنانچه در نقطه ورود به مدار؛  $\gamma > 0$  باشد، اتصال به مدار پس از نقطه حضيض و اگر  $\gamma < 0$  باشد، اتصال به مدار قبل از نقطه حضيض صورت می‌گیرد؛ در حالتی که در هنگام ورود به مدار زاویه مسیر منفی باشد، منحنی ارتفاع دچار یک گودی به سمت ارتفاع‌های پایین می‌شود که اصطلاحاً در ارتفاع شیب خوانده می‌شود.

برای برآورده شدن ارتفاع نیز باید رابطه (۳۰) برقرار شود که در این رابطه  $r_a$  فاصله نقطه اوج از مرکز زمین است و  $\mu = g_0 R_E$

$$\theta_2 \equiv r_a - \left( \frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu} \right)^{-1} = 0 \quad (30)$$

همچنین باید رابطه (۳۱) برقرار شود که مقدار  $e$  از خروج از مرکزیت مدار بیضوی است.

$$\theta_2 \equiv e^2 - \frac{1}{\mu} \cos^2 \gamma \left( \frac{V^4 r^2}{\mu} - 2V^2 r \right) - 1 = 0 \quad (31)$$

از سوی دیگر برآورده شدن معادله چهارم از رابطه (۱۰) ضروری است؛ با توجه به آزادبودن زمان نهایی و اینکه مقدار نهایی متغیرهای حالت بر روی سطح  $\Theta(x(t))$  قرارگرفته‌اند؛ برای ارضای معادله چهارم از رابطه (۱۰)، باید معادلات رابطه (۳۲) برقرار شوند:

$$\begin{cases} H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) = \\ v_1 \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right) + \dots + v_k \left( \frac{\partial \Theta_k}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \right) \end{cases} \quad (32)$$

بنابراین شرایط نهایی مسئله به صورت معادلات رابطه (۳۳) خواهند شد:

$$\begin{cases} \lambda_{\phi}(t_f) = 0 \\ \lambda_r(t_f) = v_1 \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right|_{t_f} + v_2 \left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial r} \right|_{t_f} \\ \lambda_v(t_f) = v_1 \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} \right|_{t_f} + v_2 \left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial v} \right|_{t_f} \\ \lambda_{\gamma}(t_f) = v_2 \left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial \gamma} \right|_{t_f} \\ \lambda_m(t_f) = -1 \\ \lambda_{\theta}(t_f) = 0 \\ \lambda_q(t_f) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

### حل عددی مسئله

پرواضح است که برای این مسئله راه حل تحلیلی وجود ندارد. روش حل عددی که در این تحقیق به کار گرفته شده است، روش سریع‌ترین سقوط است که بر مبنای یک حدس اولیه و اصلاح آن عمل می‌کند. حدس اولیه می‌تواند یک تاریخچه ثابت دستور هر یک از متغیرهای کنترلی باشد که به کمک رابطه (۳۴)، در یک فرایند تکراری اصلاح خواهند شد [۶]:

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) - \tau \frac{\partial H_i}{\partial u}(t) \quad (34)$$

شایان ذکر است، برای انتخاب  $\tau$  از استراتژی‌های مختلفی استفاده می‌شود. یک استراتژی ممکن به صورت رابطه (۳۵) است [۶]:

$$\tau = \frac{\frac{q}{100} |J|}{\left\| \frac{\partial H_i}{\partial u} \right\|^2} \quad (35)$$

### مشخصات موشک ماهواره‌بر

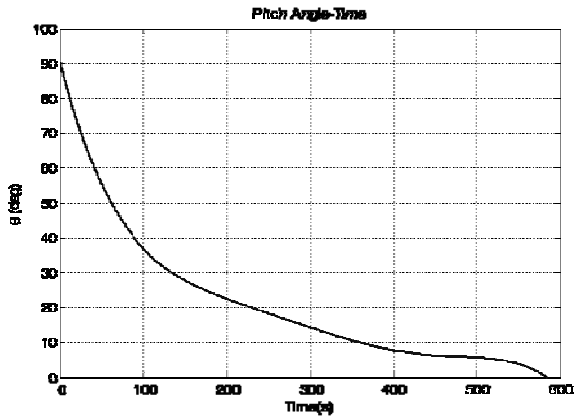
مشخصات اصلی موشک ماهواره‌بر در دو جدول (۱) و (۲)، بیان شده است.

جدول ۱- مشخصات ابتدایی مراحل مختلف موشک

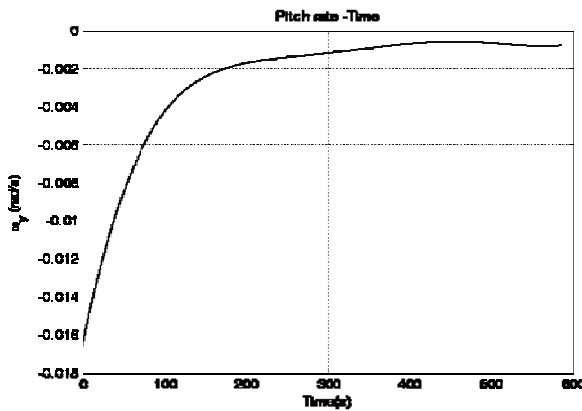
مرحله سوم	مرحله دوم	مرحله اول	پارامتر
۰/۶	۰/۹	۱/۶	ضریب بار
			پیشران
	۰/۰۶		$a_{p,c}$
	۰/۰۱۲۵		$a_{\sigma}$
	۰/۰۱۲۵		$a_{CS}$
	۰/۰۱۵		$\gamma_{PS}$
	۳۵۰		$I_{spv}(s)$
	۶۱۱ کیلوگرم بر متر مکعب		چگالی سوخت (UDMH)
	۱۴۴۷ کیلوگرم بر متر مکعب		چگالی اکسیدکننده (N2O4)
	۲/۸		$\dot{m}_{Ox} / \dot{m}_f$
	۲ متر		طول نازل
	۳ متر		قطر

## نتایج شبیه‌سازی

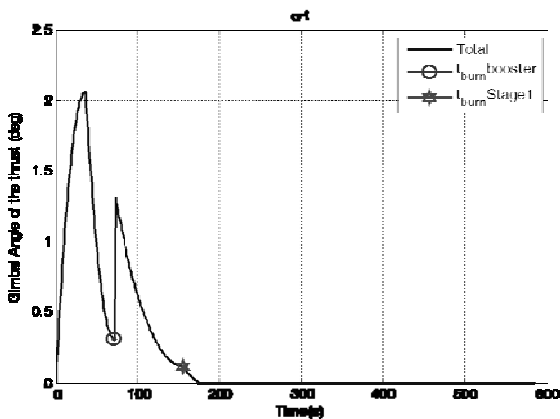
در نهایت برخی از نتایج، به خصوص نمودارهای مربوط به متغیرهای کنترل و در واقع سیاست کنترلی، نشان داده شده‌اند:



شکل ۳- تغییرات زاویه پیچ ( $\theta$ ) موشک نسبت به زمان



شکل ۴- نرخ تغییرات زاویه پیچ ( $q$ ) موشک نسبت به زمان



شکل ۵- تغییرات زاویه گیمبال ( $\delta$ ) نسبت به زمان

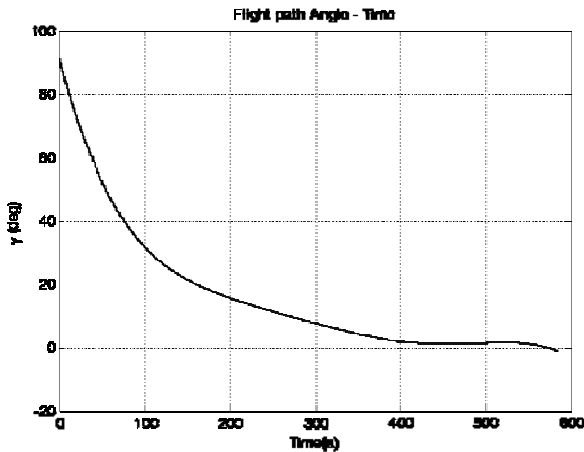
دیگر مشخصه‌ها			
بار محموله	۹۰۰۰ کیلوگرم		
ارتفاع مدار	۳۰۰ کیلومتر		
طول پوشش بار محموله	۳ متر		
طول قفسه هدایت و کنترل	۲ متر		
مشخصات بوسترها، سوخت مرکب (CNY)			
ضربه ویژه	۲۹۰ ثانیه	فشار محفظه احتراق	۷۰ اتمسفر
چگالی سوخت $gr/cm^3$	۱/۷۸	فشار خروجی نازل	۱ اتمسفر
دمای احتراق ( $k^0$ )	۳۶۹۰	ضریب پرتابی موتور	۰/۹۵
قطر	۱/۲ متر	استحکام تسلیم پوسته	۲ کیگا پاسکال
چگالی عایق $kg/m^3$	۱۴۶۰	ماکزیمم زمان کارکرد	۷۰ ثانیه
ضریب اطمینان	۱/۲	چگالی پوسته کیلوگرم مترمکعب	۷۸۰۰

## جدول ۲- مشخصات مراحل مختلف موشک

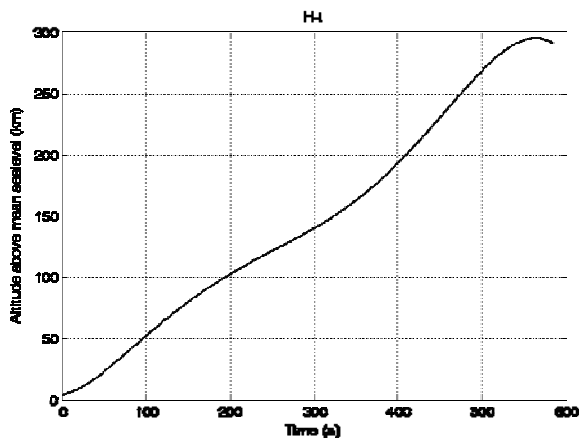
پارامتر	مرحله اول	مرحله دوم	مرحله سوم
جرم کل مرحله (تن) $M_{0i}$	۱۳۵/۹	۵۴/۱۱	۲۲/۰۳
جرم نهایی کل (تن) $M_{ei}$	۵۷/۵۱	۲۵/۱۸	۱۰/۲۵
جرم بلوک موشکی (تن) $m_{0i}$	۸۱/۷۹۳	۳۲/۰۸۳۳	۱۳/۰۳۴۸
جرم نهایی بلوک (تن) $m_{ei}$	۳/۴	۳/۱۴	۱/۲۵
جرم پیشران (تن)	۴۷/۶۲۴۱	۲۸/۹۳۶۲	۱۱/۷۸۱۷
جرم سوخت (تن)	۱۲/۵۳	۷/۶۱	۳/۱
جرم اکسیدکننده (تن)	۳۵/۰۹	۲۱/۳۲	۸/۶۸
جرم سازه (تن)	۳/۴۲	۳/۱۴۷	۱/۲۵
زمان سوزش (ثانیه)	۱۵۲/۳	۲۰۷/۹۳	۲۳۳/۹۲
طول پاک اکسیدکننده (متر)	۳/۴۵	۲/۱	۰/۸۷
طول پاک سوخت (متر)	۲/۹۲	۱/۷۸	۰/۷۳۹
طول بلوک موشکی (متر)	۸/۳۷۵	۵/۸۹	۳/۶۰۹
طول کل مرحله (متر)	۲۲/۸۷	۱۴/۴۹	۸/۶
پیشران خالص (کیلو نیوتن)	۱۰۶۶/۶۳	۴۷۷/۸۰۹	۱۷۲/۹۲۹
سرعت سوزش پیشران ( $kg/s$ )	۳۱۰/۶۵۴	۱۳۹/۱۶۱	۵۰/۳۶
مشخصات بوستر			
تعداد	۲	طول گرین (متر)	۷/۷۵
جرم هر بوستر (تن)	۱۵/۳۷	پیشران (کیلو نیوتن)	۵۳۳/۳۱۵
جرم سوخت (تن) $m_{pb}$	۱۴/۵۶	ضربه ویژه (ثانیه)	۲۴۸/۲۳۶
سرعت سوزش پیشران ( $kg/s$ )	۲۰۸/۰۵۳	جرم سازه (تن)	۰/۸۰
دیگر مشخصه‌ها			
طول کل موشک (متر)	۳۲/۸۷	مرکز جرم تا دماغه ۱	۱۴/۶ متر
مرکز جرم تا دماغه ۲	۸/۵ متر	مرکز جرم تا دماغه ۳	۴/۵ متر



از موارد قابل توجه است که در شکل‌های (۷) و (۸) نشان داده شده‌اند.



شکل ۷- تغییرات زاویه مسیر موشک نسبت به زمان



شکل ۸- تغییرات ارتفاع موشک نسبت به زمان

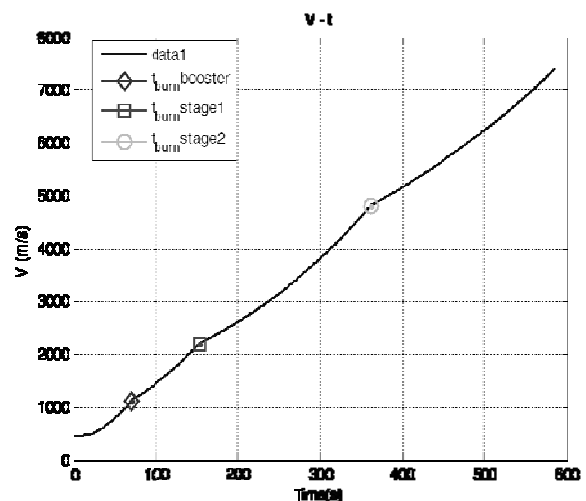
موشک مورد مطالعه در این تحقیق بر اساس جرم بار محموله ۹ تن طراحی شده بود و این در حالی است که در پایان، جرم باقیمانده ۱۰/۷ تن بود و این به دلیل ارائه برنامه مسیری بود که سبب می‌شود تا موشک به سرعت و ارتفاع مأموریت برسد، در حالیکه همچنان پیشرانی برای آن باقیمانده است. بنابراین می‌توان این پیشران اضافی را با بار محموله‌ای به اندازه ۱/۷ تن جایگزین کرد. نمودار تغییرات جرم موشک در طی کارکرد آن در شکل (۹) قابل رؤیت است.

در قسمت‌های قبل اشاره شد که موشک سیستمی، جرمی متغیر است و ممان‌های اینرسی و مرکز جرم آن به‌طور مداوم در حال تغییر است؛ در ادامه تغییرات ممان‌های اینرسی و مرکز جرم موشک نیز نشان داده شده است، که بر اساس راه‌کار مرجع [۳] محاسبه شده‌اند.

زاویه پیچ از جمله متغیرهای بردار کنترل بود. در موشک‌های ماهواره‌بر (و نیز بالستیک) معمولاً چند ثانیه اول، موشک به‌طور عمودی و با زاویه پیچ ۹۰ درجه از زمین بلند می‌شود بنابراین در شکل (۳)، در لحظات اولیه، زاویه پیچ برابر ۹۰ درجه است. از سوی دیگر در هنگام تزریق به مدار، باید این زاویه به صفر برسد. نکته دیگری که در شکل (۳) دیده می‌شود این است که بیشترین تغییرات زاویه پیچ در طی کارکرد طبقه اول صورت گرفته است؛ به‌طوری‌که در زمان جدایش طبقه اول (ثانیه ۱۵۴) زاویه پیچ به ۲۷ درجه رسیده است. این موضوع در شکل (۴) نیز که تغییرات زاویه پیچ نسبت به زمان به تصویر کشیده شده است، به خوبی قابل دریافت است.

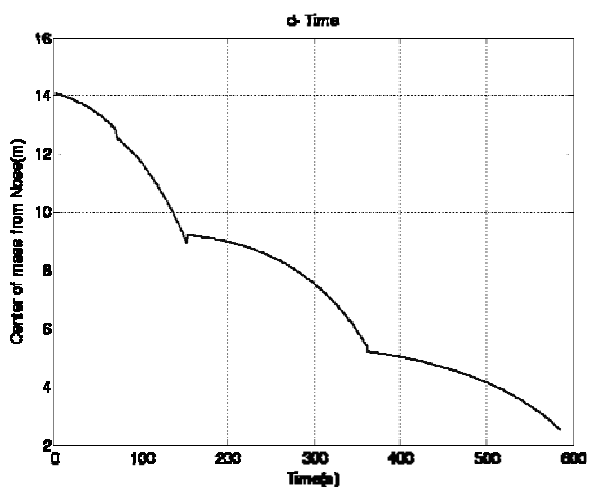
در شکل (۵) تغییرات زاویه بین بردار پیشران و محور موشک نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود؛ در زمان‌های ۷۰ و ۱۵۴ ثانیه، تغییرات ناگهانی در زاویه بین بردار پیشران و محور موشک، رخ داده است که این زمان‌ها به ترتیب زمان‌های جدایش بوسترها و طبقه اول است. همچنین در طی کارکرد طبقات دوم و سوم، زاویه بین بردار پیشران و محور موشک ثابت و برابر صفر درجه است. هم‌راستاشدن بردار پیشران با محور موشک سبب می‌شود تا گشتاور پیچشی بر موشک وارد نشود.

از دیگر نتایج قابل بررسی، نمودار سرعت موشک و واریس سرعت پایانی موشک است که به سرعت مأموریت دست یافته باشد. در شکل (۶)، تغییرات سرعت موشک نسبت به زمان نشان داده شده است.

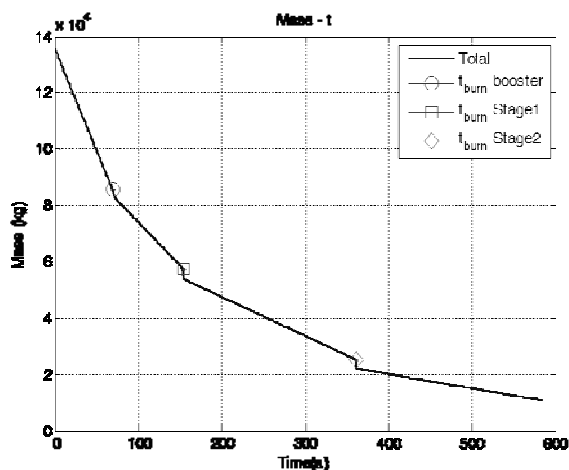


شکل ۶- تغییرات سرعت موشک نسبت به زمان

همچنین، زاویه مسیر  $\gamma$  که به صفر رسیده باشد و نیز ارتفاع موشک که به ارتفاع مأموریت، یعنی ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری دست یافته باشد،

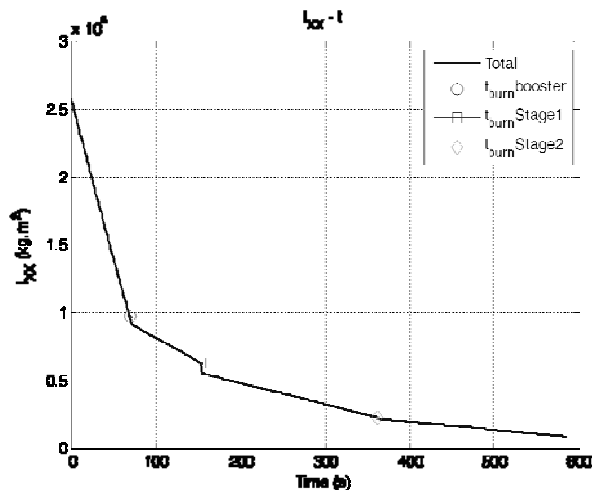


شکل ۱۲- تغییرات فاصله مرکز جرم موشک تا دماغه نسبت به زمان

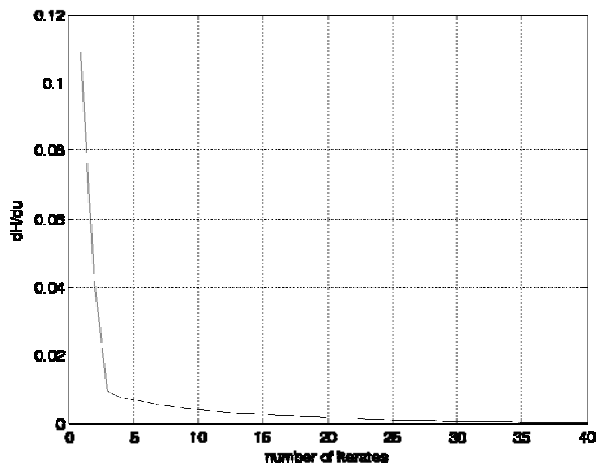


شکل ۹- تغییرات جرم موشک نسبت به زمان

در شکل (۱۲)، مرکز جرم نسبت به دماغه موشک اندازه‌گیری می‌شود و لذا با مصرف پیشران، دائماً مرکز جرم به دماغه نزدیک‌تر می‌شود؛ نکته مهم در تمامی شکل‌های (۹-۱۲)، گسستگی آن‌هاست که به دلیل فرایند جدایش طبقات موشک رخ می‌دهد. اولین گسستگی که در حدود ثانیه ۷۰ رخ می‌دهد، به دلیل جدایش بوسترهای موشک است و جدایش دوم که در حدود ثانیه ۱۵۴ رخ می‌دهد، به دلیل جدایش طبقه اول و پوشش بار محموله موشک است و در ثانیه ۳۶۲ جدایش طبقه دوم موشک رخ داده است.



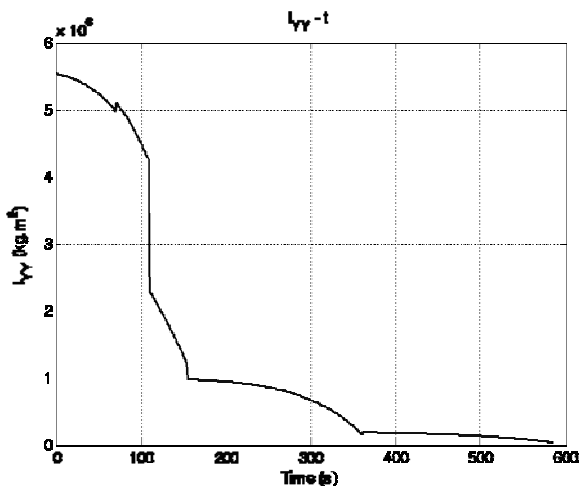
شکل ۱۰- تغییرات ممان اینرسی Ixx موشک نسبت به زمان



شکل ۱۳- تغییرات dh/du به فرایند همگرایی

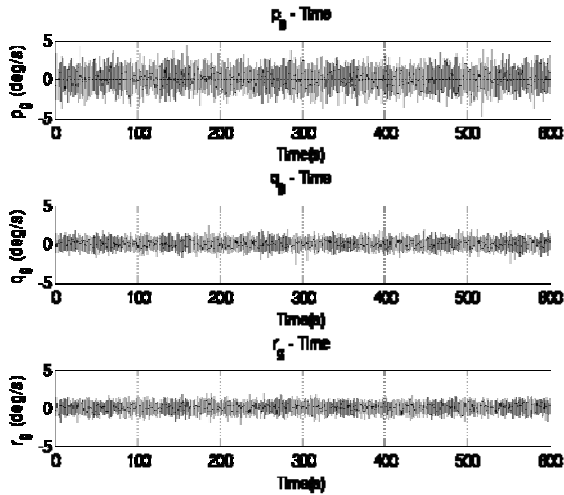
### اعمال اختلال اتمسفری

یکی از اغتشاشات جوی نسبتاً شدید، توربولانس است و رخداد آن در ارتفاعات بالا اهمیت بیشتری دارد.



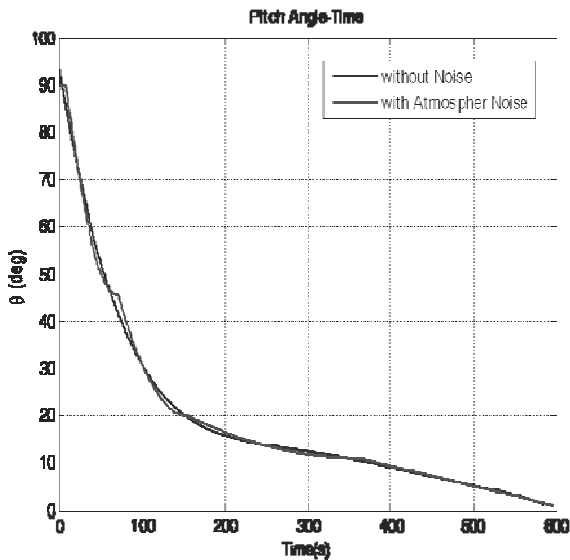
شکل ۱۱- تغییرات ممان اینرسی Iyy موشک نسبت به زمان

همچنین در شکل (۱۵)  $(p_g, q_g, r_g)$  مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای تندباد در محورهای  $(x, y, z)$  در یک لحظه زمانی از شبیه‌سازی و با انتشار آن در زمان، نشان داده شده‌است:



شکل ۱۵ - مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای تندباد در یک لحظه زمانی از شبیه‌سازی، منتشر در زمان

و در نهایت تأثیر این اختلال بر مهم‌ترین کمیت‌های پروازی یعنی زاویه حمله و زاویه پیچ نشان داده می‌شود:



شکل ۱۶ - مقایسه زاویه پیچ در حالت اعمال اختلال اتمسفری و بدون آن

همان‌طور که از شکل (۱۴) و (۱۵) مشخص است، مؤلفه‌های سرعت باد در حدود  $\pm 2$  متر بر ثانیه و مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای نیز در حدود  $\pm 3$  درجه بر ثانیه نوسان می‌کنند و بر

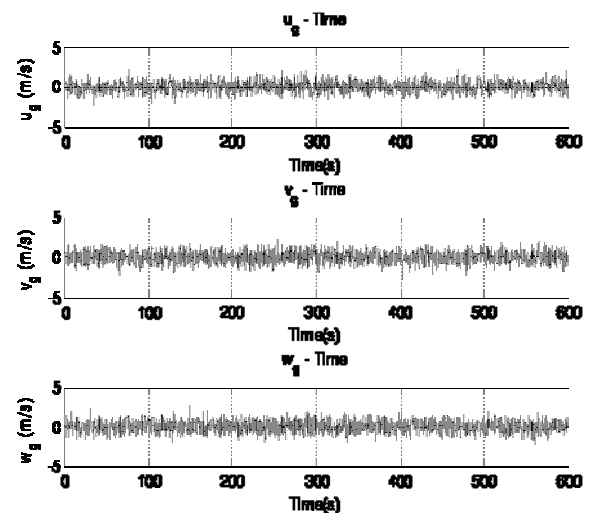
با توجه به اینکه مکانیزم توربولانس‌ها بسیار پیچیده و متغیر است برای بررسی آن‌ها از روش‌های آماری استفاده می‌شود. معمولاً دو فرآیند برای بررسی رفتار تندبادها در نظر گرفته می‌شود؛ بررسی رفتار توربولانس به صورت یک تابع گسسته و دیگری پیوسته. از آنجاکه ماهیت توربولانس‌ها متغیر و تصادفی است، امکان پیش‌بینی و بررسی دقیق آن‌ها وجود ندارد. معمولاً برای بررسی رفتار توربولانس‌های جوی از مدل‌های آماری و مدل‌های وابسته به چگالی طیفی استفاده می‌شود.

برای بررسی اثرات توربولانس جوی بر اساس چگال طیفی قدرت، از دو مدل مرسوم فون کارمن و درایدن استفاده می‌شود که اغلب مدل درایدن به علت سادگی استفاده بیشتری دارد که در این مقاله نیز از این مدل استفاده می‌شود. مدل‌های فون کارمن و درایدن در فرکانس‌های بالای باد، کمی با یکدیگر اختلاف دارند. چگالی طیفی درایدن به صورت زیر مدل می‌شود [۷]:

$$\Phi_{Dry}(\Omega) = \frac{\sigma^2 L (1 + 3L^2 \Omega^2)}{\pi (1 + L^2 \Omega^2)^2}; \Omega = \frac{\omega}{U_0} \quad (36)$$

در رابطه (۳۶)  $L$  طول موج تندباد با واحد متر،  $\sigma$  میزان ریشه میانگین مربعات  $(R.M.S)^5$  سرعت تندباد با واحد متر بر ثانیه و  $\Omega$  (فرکانس فاصله‌ای) با واحد رادیان بر ثانیه است.

پس از اعمال این اختلال در معادلات شبیه‌سازی، در ادامه و در شکل (۱۴)  $(u_g, v_g, w_g)$  مؤلفه‌های سرعت تندباد در محورهای  $(x, y, z)$  در یک لحظه زمانی از شبیه‌سازی و با انتشار آن در زمان، نشان داده شده‌است:



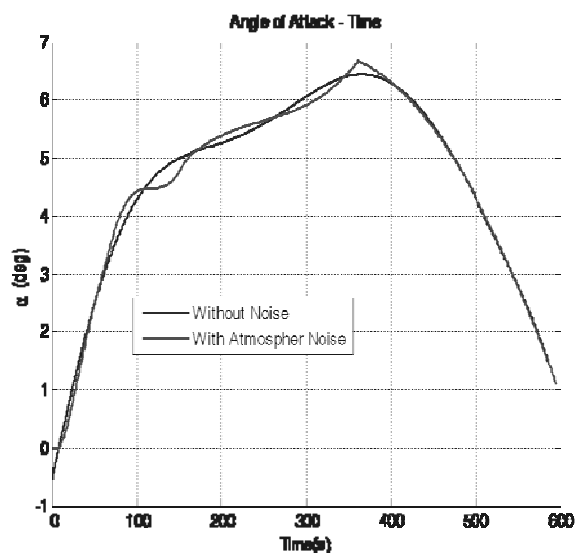
شکل ۱۴ - مؤلفه‌های سرعت تندباد در یک لحظه زمانی از شبیه‌سازی، منتشر در زمان

اثبات<sup>۶</sup> نرم‌افزار است، گرچه برای اعتبارسنجی یکپارچه<sup>۷</sup> منابع اطلاعاتی مطلوب در دست نیست.

در بخش فعال موشک‌های ماهواره‌بر، هدایت بر اساس دنبال کردن یک مسیر از پیش تعیین شده، استوار است؛ یعنی در این فاز، هدایت به صورت حلقه باز و با فرمان‌های از پیش تعیین شده بر اساس زمان است. برای پرواز نامی موشک، در انتهای زمان این مرحله از هدایت (فاز قدرت) موتور موشک خاموش می‌شود و با ادامه یک فاز غیرفعال<sup>۸</sup> موشک به مدار هدف خود می‌رسد (یا اگر موشک بالستیک باشد، با سقوط آزاد خود، بر روی هدف فرود می‌آید). اما در عمل این نوع هدایت برای موشک‌های ماهواره‌بر (و نیز موشک‌های بالستیک دوربرد؛ ۱۰۰۰ کیلومتر به بالا) با توجه به عوامل طبیعی غیرقابل پیش‌بینی و عدم قطعیت در پارامترهای موشک (مخصوصاً موتور آن)، خطای بسیار زیادی را در تزیق بار به مدار (فاصله برخورد موشک با هدف برای بالستیک‌ها) نتیجه می‌دهد. برای حذف اثر این عوامل لازم است تا هدایت موشک با استفاده از بخش تعیین موقعیت موشک، به صورت حلقه بسته صورت پذیرد. این مرحله از هدایت موشک، تا قبل از خاموش شدن موتور است، یعنی کمی قبل از زمان نامی خاموش شدن موتور موشک. در این صورت مرحله هدایت از پیش تعیین شده زودتر از زمان نامی خاموش شدن موتور تمام شده و هدایت موشک از یک زمان مشخص به بعد، به صورت حلقه بسته توسط یک روش هدایتی مناسب انجام می‌شود. در مرحله هدایت حلقه بسته، هرگاه سیستم هدایت تشخیص بدهد که خاموش شدن موتور منجر به رسیدن مرحله بالایی موشک به مدار (سقوط آزاد موشک بر روی هدف برای بالستیک‌ها) می‌شود، فرمان خاموشی موتور را صادر می‌کند. به‌طور خلاصه مراحل هدایت در فاز قدرت یک موشک ماهواره‌بر (بالستیک) را می‌توان به این صورت بیان کرد: ۱- هدایت بر اساس هدایت حلقه باز ۲- تغییر روش هدایتی در یک زمان مشخص از هدایت حلقه باز به هدایت حلقه بسته ۳- خاموش کردن موتور در صورت تحقق شرط لازم. مهم‌ترین و کاربردی‌ترین قانون هدایت حلقه باز، هدایت برنامه فراز است که در این مقاله به آن پرداخته شده است و هدف اصلی این مقاله یافتن یک برنامه فراز بهینه برای فاز هدایتی حلقه باز بود. ضمن اینکه استفاده از یک روش کنترل بهینه برای یافتن مسیر بهینه در این مقاله بررسی شد، متغیرهای حالت نیز به دو دسته کند و تند تقسیم شدند.

با اعمال توربولانس به معادلات و مقایسه نتایج با حالت بدون توربولانس، مقاوم بودن موشک به این اختلال اتمسفری به اثبات رسید.

طبق شکل‌های (۱۶) و (۱۷)، تأثیر توربولانس بر روی رفتار پرنده بسیار ناچیز است. این تأثیر بسیار کم توربولانس را می‌توان به «مقاوم بودن وسیله پرنده در برابر اختلال» تعبیر کرد.



شکل ۱۷- مقایسه زاویه حمله در حالت اعمال اختلال اتمسفری و بدون آن

البته دلیل اصلی این موضوع این است که در ارتفاعات بالا، از شدت توربولانس کاسته می‌شود و وسیله پرنده نیز بیشترین زمان پرواز خود را در خارج از جو سپری می‌کند و لذا موشک‌های ماهواره‌بر یا بالستیک در برابر توربولانس‌ها مقاوم هستند؛ در حالی که برای وسیله پرنده‌ای که بیشترین زمان پرواز را در نزدیکی سطح زمین سپری می‌کند، این موضوع اهمیت می‌یابد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، نرم‌افزاری در محیط متلب تهیه شده است که در آن با استفاده از روش غیرمستقیم کنترل بهینه و حل عددی سریع‌ترین سقوط، مسیر بهینه موشک ماهواره‌بر را براساس ماکزیمم‌سازی بار محموله تعیین می‌کند. پاسخ‌های نمودارهای (۱۲-۳) مربوط به یک موشک سه مرحله‌ای بوستردار است. در این مثال بار محموله اولیه موشک ۹ تن بود و بعد از تعیین مسیر بهینه، جرم نهایی موشک به ۱۰/۷ تن رسید و در واقع ۱/۷ تن بر جرم نهایی موشک افزوده شد. قابل ذکر است که نتایج حاصل از نرم‌افزار حاصل، هماهنگی بسیار مطلوبی را در مقایسه با نتایج مرجع [۴] دارد که این خود به منزله

6. Verification  
 7. Validation  
 8. Coasting

## مراجع

- [4] Waldron, W. M., "Optimal Vertical Plane Booster Guidance Including Pitch Dynamics," Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy, Blacksburg, Virginia, April 1996.
- [5] Park, S. Y., "Optimization and Guidance of Ascent Trajectories with Inequality Constraints," Texas A & M University, A Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy, May 1996.
- [6] Kirk, D. E., *Optimal Control Theory and Introduction*, Prentic-Hall, 1970.
- [7] Roskam, J., *Advanced Flight Dynamic*, First Edition, New York, Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1979.
- [۱] شاهمیرزایی جشوقانی، صدیقه و نصرت‌اللهی، مهران. «روش مهندسی برای تعیین مسیر بهینه موشک بالستیک بر پایه برد ماکزیمم»، هفتمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، اسفند ۱۳۸۶.
- [2] Regan, F. J., *Reentry Vehicle Dynamics*. (AIAA Education Series), Published by American Institute of Aeronautics and Astronautics, INC, 1984.
- [۳] شاهمیرزایی جشوقانی، صدیقه و نصرت‌اللهی، مهران. «طراحی و بهینه‌سازی برنامه مسیر موشک ماهواره‌بر چندمرحله‌ای سوخت مایع و دارای بوستر»، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی هوافضا، تابستان، ۱۳۸۷.