

Governing Equations in Mechanical Analysis of Satellite Carrier Adapter

J. Eskandari Jam^{1*}, M. Noorabadi², S. H. Taghavian³ and N. Garshasbi-Nia⁴

1, 2, 3. Composite Center, Malek Ashtar University and Technology

4. Iran Polymer and Petrochemical Institute

*Lavizan, Tehran, IRAN

jejam@mail.com

In this paper the mechanical behavior of satellite carrier adapter made of composite lattice shell is examined. First, the geometrical parameters of the composite lattice shell are analyzed. Choosing the direction for winding the fibers (geodesic route), geometric equations of the structure is elicited. Then, stiffness matrix of the structure is obtained according to these equations. Finally using finite element modeling of a conical lattice shell sample, the comparison between finite element and analytical results are presented. The analytical and numerical results show that with increasing rib's thickness and Width, axial strain of the structure decreases nonlinearly.

Keywords: Carrier adapter, Composite lattice shell, rib, FEM

1. Associate Professor (Corresponding Author)
2. M. Sc.
3. M. Sc.
4. PhD Candidate

روابط حاکم در تحلیل رفتار مکانیکی آداپتور کامپوزیتی ماهواره بر

جعفر اسکندری جم^{۱*}، میلاد نورآبادی^۲، سیدحسین تقویان^۳ و ندا گرشاسبی نیا^۴

۱، ۲ - مرکز کامپوزیت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

۴ - پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران

*بزرگراه شهید بابایی، لویزان

eskandari@mut.ac.ir

در این مطالعه، رفتار مکانیکی آداپتور کامپوزیتی ماهواره بر (سازه مشبک مخروطی) مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. در ابتدا، پارامترهای هندسی سازه مشبک مخروطی بررسی و با انتخاب بهترین مسیر برای پیچش الیاف (مسیر ژئودسیک)، معادلات هندسی آن استخراج و سپس با توجه به این معادلات، ماتریس سفتی معادل به دست می آید. در نهایت با مدل سازی اجزای محدود یک نمونه، رفتار مکانیکی نتیجه شده از روش حل تحلیلی با روش اجزای محدود مقایسه شده است. نتایج عددی و تحلیلی نشان می دهد که با افزایش ضخامت و پهنای ریب کرنش در جهت محوری سازه به صورت غیرخطی کاهش می یابد.

واژه های کلیدی: آداپتور ماهواره بر، سازه مشبک مخروطی، ریب، اجزای محدود

مقدمه

دستیابی به استحکام بالا با کمترین وزن ممکن همواره یکی از مهم ترین پارامترهای طراحی مهندسی است. به طور کلی دستیابی به استحکام بیشتر با کمترین مقدار ماده مصرفی، علاوه بر کاهش هزینه مواد اولیه می تواند در سایر پارامترهای طراحی نیز اثرگذار باشد، به عنوان نمونه در مورد سامانه های متحرکی مانند: هواپیماها، هاورکرافت ها، هلی کوپترها و سازه های فضایی، کاهش وزن علاوه بر کاهش هزینه تولید بر عملکرد کلی سازه نیز تأثیر ویژه ای دارد. یکی از راهکارهایی که در سال های اخیر برای کاهش وزن سامانه های هوایی و فضایی مورد استفاده قرار گرفته است، استفاده از پوسته های مشبک کامپوزیتی در ساخت این قبیل سامانه هاست.

امروزه، سازه های مشبک مدور قطری بیش از ۴ متر و طولی بیشتر از ۸ متر دارند. همچنین اندازه سلول های مشبک تولید شده، محدودیت خاصی ندارند. از میان مطالعات منتشر شده، طراحی مفهومی سازه های استوانه ای تحت فشار محوری در مرجع [۲] بیان شده است. همچنین نحوه طراحی و قیود لازم برای طراحی سازه های مخروطی و سیلندری در مرجع [۳] با در نظر گرفتن مکانیک تسلیم مواد به کاررفته، بیان شده است. انتخاب مسیر پیچش الیاف برای طراحی سازه های مدور مشبک ارتباط تنگاتنگی با کاربرد سازه مشبک دارد [۴]. یکی از جامع ترین تحقیقاتی که در مورد انواع الگوهای مشبک انجام شده است، مربوط به چن و سای در سال ۱۹۹۵ است [۵]. در تحقیقات آنها اثر انواع بارگذاری ها بر روی انواع الگوهای مشبک، بررسی شده است و مقایسه های خوبی میان خواص مکانیکی انواع ساختارهای مشبک، ساندویچی و چندلایه صورت پذیرفته است. بررسی تحلیلی مکانیزم تسلیم سازه های مشبک، باعث انتخاب صحیح شکل هندسی سازه مشبک می شود. ارزیابی قابلیت استحکام سازه های مشبک تحت بارگذاری فشاری بر اساس کماتش کلی، کماتش محلی ریب های ماریچ و

۱. دانشیار (نویسنده مخاطب)

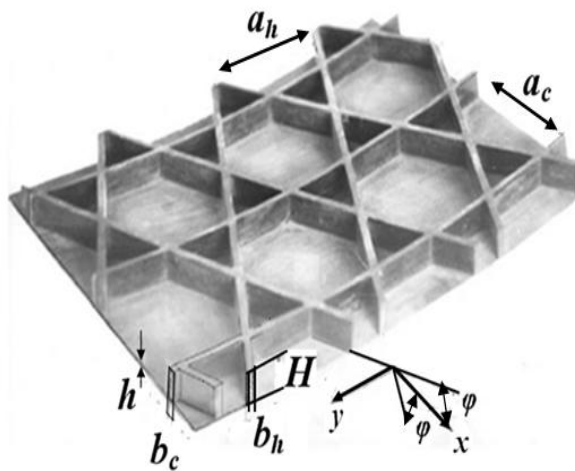
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد

۳. کارشناس ارشد

۴. دانشجوی دکتری

۲. چگونگی فرآیندهای طراحی و بهینه‌سازی ۳. سهولت ساخت و تولید

علاوه بر استفاده از خواص مکانیکی بالقوه سازه‌های مشبکی که از مواد کامپوزیت ساخته شده‌اند، سبکی این سازه‌ها و تحمل بار زیاد از قابلیت‌های ویژه اینگونه سازه‌هاست. این مسئله باعث شده است که در ساخت هواپیما و سامانه‌های ماهواره‌ای از این سازه‌ها به‌طور گسترده استفاده شود. نمونه‌ای از یک آداپتور ماهواره‌بر که به‌طور جداگانه با استفاده از آلومینیوم و مواد کامپوزیت تولید شده‌اند در شکل (۲) نمایش داده شده است. استفاده از سازه کامپوزیتی (آداپتور ماهواره‌بر) نسبت به سازه آلومینیومی ۳۰ درصد وزن سازه را کاهش می‌دهد. آداپتور ماهواره‌بر وظیفه حمل ماهواره و قراردادن ماهواره در مدار زمین را به عهده دارد. استفاده از سازه مشبک کامپوزیتی (به‌صورت تنها یا ترکیبی از سازه‌های زیرین و روین) به‌عنوان آداپتور ماهواره‌بر باعث کاهش وزن و در عین حال افزایش استحکام می‌شود. نمایی از کاربرد آداپتور ماهواره‌بر در بخش زیرین سامانه ماهواره در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل ۱- نمایی از ساختار مشبک با سازه زیرین [۱]

سازه‌های کامپوزیتی طراحی شده برای استفاده در سازه‌های فضایی با توجه به نوع کاربری که دارند، محدودیت‌هایی نیز دارند. انحنای مسیر پیچش الیاف (k) یکی از قيودی است، که معمولاً در طراحی سازه‌های مدور تحت بارمحوری نقش مهمی را ایفاء می‌کند [۷]. با توجه به این موضوع روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} k(x, T) &\leq k_{\max} & x \in [0, L] \\ k(x, T) &\geq -k_{\max} & x \in [0, L] \end{aligned} \quad (1)$$

استحکام ریب‌های ماریپچ صورت می‌گیرد [۶]. یکی از جدیدترین، جامع‌ترین و صنعتی‌ترین تحقیقاتی که در سال‌های اخیر انجام شده است، مربوط به تحقیقات وسیلیو و همکارانش است که نتایج آن طی دو مقاله در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۶ به چاپ رسید [۷، ۸]. مرزو در دو مقاله جداگانه در سال ۲۰۱۱ به بررسی کماتش سازه مشبک استوانه‌ای و مخروطی به روش اجزای محدود پرداخته است [۸، ۹]. کماتش کلی سازه، کماتش محلی ریب‌های ماریپچی و تسلیم ریب‌های ماریپچی و محیطی جزء حالت‌های بحرانی برای ارزیابی استحکام سازه مشبک است.

در این مقاله به بررسی رفتار مکانیکی سازه مشبک مخروطی (آداپتور ماهواره‌بر) تحت بار محوری پرداخته شده است. بر این اساس در ابتدا، پارامترهای هندسی سازه مشبک مخروطی بررسی شده است و پیچش الیاف با توجه به کاربرد و نوع بارگذاری ساختارهای مشبک صورت می‌گیرد، به همین منظور در فرآیند طراحی سازه مشبک مخروطی مسیر ژئودسیک انتخاب شده است، سپس معادلات مربوط به تسلیم ریب‌های سازه مشبک مخروطی استخراج شده و با ایجاد یک مدل اجزای محدود، نتایج حاصل از روش تحلیلی و اجزای محدود مقایسه شده است.

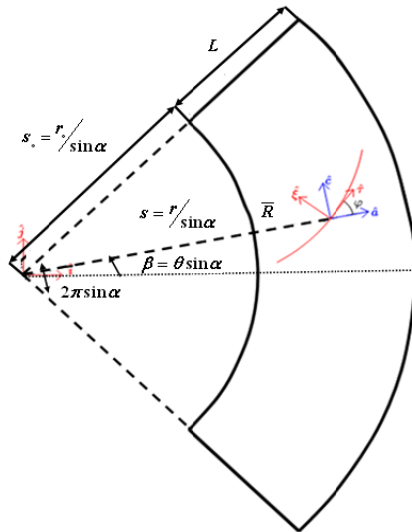
تحلیل هندسی (قیود و پارامترها)

ساختارهای مشبک از پیشرفته‌ترین و جدیدترین الگوهای استفاده شده در طراحی سازه‌های کامپوزیتی هستند، اگر چه در سازه‌های متشکل از مواد همسانگرد مانند سازه‌های فلزی کاربرد این نوع از پیکره‌بندی‌ها سابقه‌ای طولانی دارد. استفاده از مواد کامپوزیتی مشبک، این امکان را فراهم می‌سازد که از خواص طولی (در راستای الیاف) مواد کامپوزیتی در جهات مختلف سازه استفاده شود. این نکته یکی از مزایای برجسته استفاده از این ساختارها در طراحی سازه‌هایی است که در پیکره خود به مواد مرکب نیاز دارند. ساختارهای مشبک مانند سایر ساختارها متغیرهای هندسی دارند، که در فرآیندهای طراحی و همچنین بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این متغیرها در واقع تعیین‌کننده پیکره کلی سازه‌های مشبک، از جمله زاویه (φ)، ضخامت (H)، عرض (b_c, b_h) و فاصله ریب‌ها (a_c, a_h) از یکدیگر هستند.

نمونه‌ای از یک ساختار مشبک با سازه زیرین به همراه پارامترهای آن در شکل (۱) نمایش داده شده است. همچنین ساختارهای مشبک، پیکره‌بندی‌های متفاوتی دارند که خواص مختلفی را ایجاد می‌کنند. به‌طور کلی خواص این پیکره‌بندی‌ها را در سه حوزه می‌توان بررسی کرد:

۱. خواص و بازدهی مکانیکی

نمایی از گستره قطعی از مخروط ناقص در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل ۴- گسترش یافته قطعی از مخروط [۷]

با توجه به معادله (۱) و شکل (۱) داریم:

x : فاصله طولی مختصات نقاط بر روی سطح سازه از کمترین شعاع

L : طول مخروط در امتداد سطح

k : انحنای مسیر

T : زاویه الیاف در هر فاصله از رأس مخروط نسبت به خط

عبورکننده از رأس و مماس بر سازه

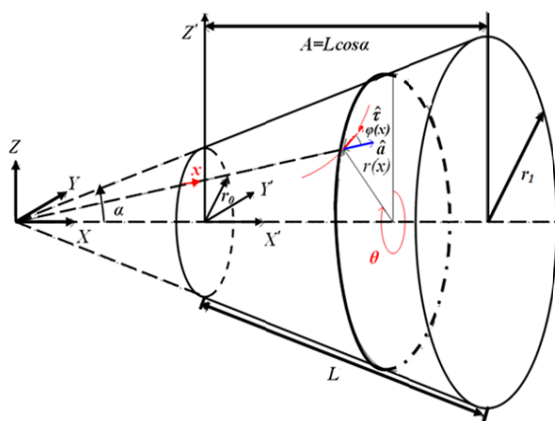
با توجه به شکل (۴) زاویه بین بردار \hat{a} (در امتداد طولی) و

مماس بر الیاف در هر منطقه با ϕ نمایش داده می‌شود.

همچنین تعدادی از پارامترهای هندسی مورد استفاده برای

استخراج معادلات حاکم بر پیش الیاف در شکل (۵) نمایش داده

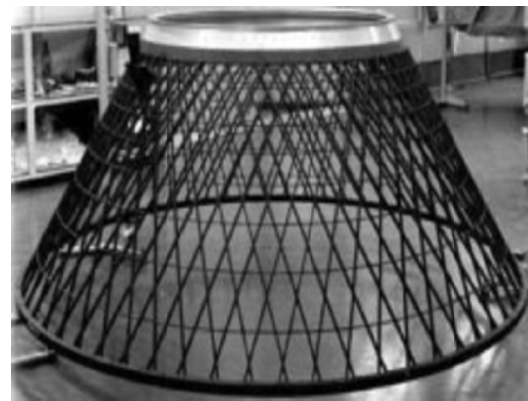
شده است.



شکل ۵- هندسه مخروط ناقص [۷]



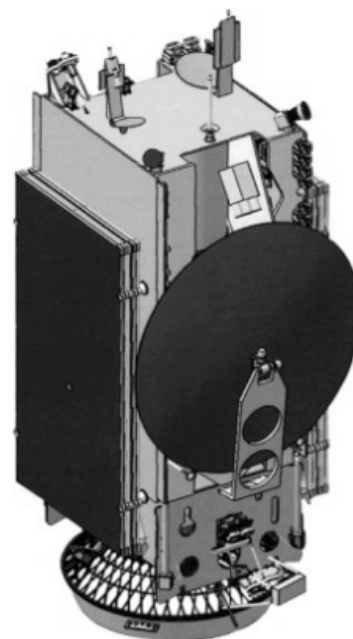
(الف)



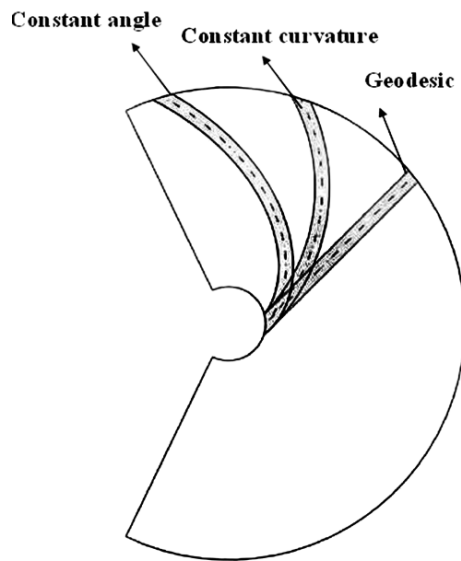
(ب)

شکل ۲- (الف) سازه مشبک مخروطی (آداپتور ماهواره‌بر) از جنس آلومینیوم

(ب) از جنس کامپوزیت [۱]



شکل ۳- نمایی از کاربرد آداپتور ماهواره در بخش زیرین سامانه ماهواره [۸]



شکل ۶- نمای گسترش یافته از سه مسیر روی مخروط

با توجه به شکل (۵) می‌توان پارامترهای زیر را تعریف کرد:

r_0 : شعاع کوچک مخروط

r_1 : شعاع بزرگ مخروط

A : طول محوری مخروط

L : طول مماس بر سطح مخروط

α : زاویه یال مخروط نسبت به محور مخروط

زاویه α از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\tan \alpha = \frac{r_1 - r_0}{A}, \quad \sin \alpha = \frac{r_1 - r_0}{L} \quad (2)$$

از آنجا که شعاع مخروط به صورت محلی تغییر می‌کند در نتیجه شعاع را می‌توان تابعی از x در نظر گرفت که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$r(x) = r_0 + x \sin \alpha \quad (3)$$

مختصات طولی سطح مخروط $s(x)$ به عنوان فاصله طولی از نوک مخروط تا هر نقطه‌ای روی سطح تعریف می‌شود. با توجه به این توضیحات داریم:

$$s = \frac{r(x)}{\sin \alpha} = x + \frac{r_0}{\sin \alpha} \quad (4)$$

با توجه به شکل بالا \hat{a} و \hat{n} به ترتیب بردارهایی در جهت طولی و محیطی سازه مخروطی هستند. بردار n بردار عمود بر سطح مخروط است.

$$dx = ds, \quad r(x)d\theta = s d\beta \quad (5)$$

مسیرهای پیچش الیاف

برای تولید سازه‌های مدور توسط دستگاه فیلامنت وایند، چندین روش پیچش مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولاً با توجه به کاربرد سازه و اینکه تحت تأثیر چه نوع بارهایی قرار می‌گیرد، پیچش الیاف انجام می‌شود. پیچش الیاف معمولاً به سه صورت ژئودسیک، زاویه ثابت و انحنای ثابت صورت می‌گیرد. در ادامه به بحث در مورد مسیرهای متداول برای پیچش الیاف پرداخته و در نهایت با انتخاب مسیر پیچش مناسب که تحت تأثیر مهم‌ترین عامل (بارگذاری) است پرداخته شده است. در شکل (۶) نمایی از سه مسیر مورد بحث نمایش داده شده است.

مسیر پیچش ژئودسیک

این مسیر به نام کوتاه‌ترین مسیر نامگذاری شده است. کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه بر روی هر سازه مدور را مسیر ژئودسیک می‌نامند، طوری که اگر با یک نخ این دو نقطه به هم متصل شوند و سازه گسترش پیدا کند، انحنای مسیر نخ صفر می‌شود. برای حالت ژئودسیک معادلات زیر حاکم است [۷]:

$$\sin \varphi(x) = \frac{r_0 \sin T_0}{r(x)} = \frac{s_0 \sin T_0}{s} \quad (6)$$

که T_0 زاویه الیاف در طرف شعاع کوچک مخروط است و می‌تواند بین -90° و $+90^\circ$ تغییر کند. همان‌طور که بیان شد انحنای این مسیر جزء یکی از قیود اصلی بوده و برابر صفر است [۷].

$$k(x) = 0 \quad (7)$$

مسیر پیچش زاویه ثابت

در حالت زاویه ثابت، پیچش الیاف با آهنگ خاصی که زاویه ثابتی حاکم است صورت می‌پذیرد [۷].

$$\varphi(x) = \varphi$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tan \varphi}{r(x)} \quad (8)$$

انحنای مسیر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k(x) = \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{r(x)} \quad (9)$$

برای طراحی، لازم است پارامترهای مؤثر (وابسته و مستقل) در طراحی سازه مشبک مخروطی مورد بررسی قرار گیرد.

پارامترهای مستقل

تعداد ریب‌های محیطی و ماریپیچی (n_h, n_c) ، همچنین ضخامت سازه H به‌عنوان پارامترهای مستقل در طراحی سازه مشبک مخروطی نقش ایفاء می‌کنند.

پارامترهای وابسته

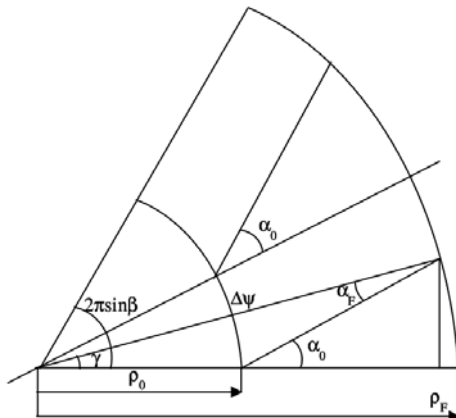
پارامترهای وابسته عبارتند از: $\Delta\psi, \varphi, \lambda, a_c, a_h$ (نمایی از پارامترهای ذکر شده در طراحی سازه مشبک مدور در شکل (۷) نمایش داده شده است).

برای استخراج معادلات حاکم بر سازه، ابتدا به تعریف برخی پارامترهای هندسی روی سازه مشبک مخروطی می‌پردازیم. در این مرحله قطعی از مخروط را گسترش داده و سپس استخراج معادلات انجام می‌شود. با استفاده از روابط مربوط به ژئودسیک بین خط عبورکننده از رأس مخروط که از مخروط ناقص عبور می‌کند و زاویه ژئودسیک در هر نقطه رابطه زیر برقرار است [۶]:

$$\rho \sin \phi = \rho_0 \sin \phi_0 = C_0 = \text{constant} \quad (12)$$

که $\rho = \frac{r}{\sin \alpha}$ است و r شعاع سطح مخروط است که در هر نقطه متفاوت است و α زاویه بین خط عبورکننده بر مخروط و محور مخروط است. با مشتق‌گیری از معادله (۱۲) داریم:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\phi}{\tan \phi} \quad (13)$$



شکل ۷- قطاع گسترش‌یافته سازه مشبک مخروطی

$\Delta\psi$ زاویه بین دو ریب هلیکال شکل (۷) است.

$$\Delta\psi = \frac{2\pi \sin \alpha}{n_h} \quad (14)$$

مسیر پیچش انحنای ثابت

در این نوع پیچش الیاف، انحناء در کل مسیر بدون تغییر باقی است. بنابراین قید انحناء به‌سادگی می‌تواند مورد ارزیابی قرار گیرد. معادلات مربوط به این حالت در ادامه آورده شده است. تغییرات زاویه به‌وسیله رابطه زیر به‌دست می‌آید [۷]:

$$\sin \varphi(x) = \frac{r_0 \sin T_0}{r(x)} + \frac{\kappa}{\sin \alpha} \left(\frac{r(x)^2 - r_0^2}{2r(x)} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{s_0 \sin T_0}{s} + \kappa \left(\frac{s^2 - s_0^2}{2s} \right)$$

با توجه به اینکه زاویه الیاف در مقطع کوچک مخروط T_0 و زاویه الیاف در مقطع بزرگ‌تر T_1 باشد مقدار انحناء در طول مسیر عبارت است از [۷]:

$$\kappa = \left(\frac{r_1}{\bar{r}} \sin T_1 - \frac{r_0}{\bar{r}} \sin T_0 \right) \frac{1}{L} \quad (11)$$

$$\left[\bar{r} = \frac{r_0 + r_1}{2} \right]$$

مسیر انحنای ثابت می‌تواند در بین دو یا چند ریب دایره‌ای قرار گیرد. با توجه به بحث‌های انجام شده در بالا، در مرحله اول باید مناسب‌ترین مسیر پیچش الیاف انتخاب شود. از آنجاکه اساس طراحی این نوع سازه‌ها برای تحمل بارهای فشار محوری است، بنابراین مهم‌ترین مسئله مطرح‌شدن در این نوع سازه‌ها، بحث کمانش و پایداری ارتجاعی است. با این توضیحات مشخص می‌شود که طراحی سازه مشبک و در نهایت ساخت باید بر مبنای حالتی انجام گیرد که مقاومت خوبی در مقابل کمانش از خود نشان دهد. با بررسی خصوصیات مطرح شده در پیچش الیاف، حالت ژئودسیک بهترین حالت پیچش الیاف برای طراحی و ساخت سازه مشبک در مقابل بارهای فشار محوری مطرح می‌شود. از آنجاکه این نوع پیچش الیاف، دارای انحنای صفر است، دارای کمترین حساسیت نسبت به دو نوع پیچش دیگر است. با توجه به توضیحات بالا در این مطالعه از معادلات ژئودسیک برای تحلیل سازه مشبک مخروطی استفاده می‌شود.

ماتریس سفتی سازه مشبک مخروطی

ساختار مشبک از تعدادی ریب‌های ماریپیچ و محیطی تشکیل شده است. تمام پارامترهای طراحی بر مبنای موقعیت محیطی و ماریپیچی ریب‌ها مشخص می‌شوند. برخی از این پارامترها به زاویه حرکت ریب‌های ماریپیچ و تعدادی دیگر نه تنها به زاویه مخروط بستگی دارند بلکه با افزایش ارتفاع سازه مخروطی با آهنگ خاصی دچار تغییر می‌شوند. با توجه به پیچیدگی هندسی سازه مشبک مخروطی

(۲۱) استخراج می‌شود [۶]:

$$\bar{E}_x = \frac{1}{H} \left(\frac{q_{11}q_{22} - q_{12}^2}{q_{22}} \right) \quad (22)$$

q_{ij} استفاده شده در معادله (۲۲) مولفه‌های ماتریس سفتی Q است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به زاویه ریب‌های مارپیچ، پهنای ریب و فواصل ریب‌های مارپیچی و دایره‌ای بستگی دارد.

روابط تنش و کرنش در سازه مشبک مخروطی

به منظور بررسی تسلیم ریب‌های سازه مشبک از روابط مربوط به تنش و کرنش استفاده می‌گردد. با توجه به مطالب ذکر شده رابطه تنش - کرنش ریب‌ها همانند مواد ایزوتروپ بوده و برابر $\sigma = E \varepsilon$ است که این معادله برای تنش - کرنش‌های محلی و کلی به صورت زیر بسط داده می‌شود [۶]:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_h \sin^2 \varphi + \gamma_{xh} \sin \varphi \cos \varphi \quad (23)$$

با توجه به معادله بالا ε_x و ε_h به ترتیب کرنش در جهت ریب و محیطی و γ_{xh} است. تنش کلی در جهت ریب σ_x به وسیله دو ریب مارپیچی که در جهت زاویه‌ای ($\pm \varphi$) قرار دارند محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x V_{f\varphi} \cos^2 \varphi + \sigma_{-x} V_{f-\varphi} \cos^2 \varphi \\ \sigma_x &= (\varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_h \sin^2 \varphi) 2E_h V_{f\varphi} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (24)$$

برای محاسبه تنش کلی در جهت محیطی (σ_h) سه پارامتر تاثیرگذار هستند که دو تا از این پارامترها به ریب‌های مارپیچی بستگی دارند. تنش محیطی برابر:

$$\begin{aligned} \sigma_h &= \sigma_\phi V_{f\phi} \sin^2 \phi + \sigma_{-\phi} V_{f-\phi} \sin^2 \phi + \sigma_h V_{fh} \\ \sigma_h &= (\varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_h \sin^2 \varphi) 2E_h V_{f\varphi} \cos^2 \varphi \\ &\quad + \varepsilon_h E_c V_{fh} \end{aligned} \quad (25)$$

به همین ترتیب تنش برشی برابر است با:

$$\tau_{xh} = (2E_h V_{f\varphi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \gamma_{xh} \quad (26)$$

$V_{f\varphi}$ و V_{fh} از معادله (۲۷) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} V_{f\varphi} = V_{f-\varphi} &= \frac{b_h}{a_h} \\ V_{fh} = V_{f-h} &= \frac{b_c}{a_c} \end{aligned} \quad (27)$$

نتایج و بحث

با ایجاد یک مدل اجزای محدود و تحلیل آن، صحت نتایج حل معادلات تحلیلی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. همچنین مدل اجزای

طراحی هندسی و اجزای محدود سازه مشبک مخروطی با این فرض صورت می‌گیرد که ریب‌های دایره‌ای بین تقاطع ریب‌های مارپیچی قرار دارند. با در نظر گرفتن هندسه سازه مشبک مخروطی شکل (۷) می‌توان معادله زیر را استخراج کرد:

$$\gamma = \frac{\Delta \psi}{2} (n_c - 1) \quad (15)$$

زاویه ژئودسیک در سطح مقطع کوچک‌تر (φ_0) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\rho_F \sin \gamma}{\rho_F \cos \gamma - \rho_0} \right) \quad (16)$$

همچنین زاویه ژئودسیک در قطر بزرگ‌تر φ_F برابر:

$$\varphi_F = \varphi_0 - 1 \quad (17)$$

تغییرات ρ نسبت به φ از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$d\rho = -C_0 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi \quad (18)$$

فضای عمودی بین ریب‌های دایره‌ای و مارپیچی برای یک سلول در هر ردیف از معادله‌های زیر استخراج می‌شود:

$$a_h = 2a_c \sin \varphi \quad (19)$$

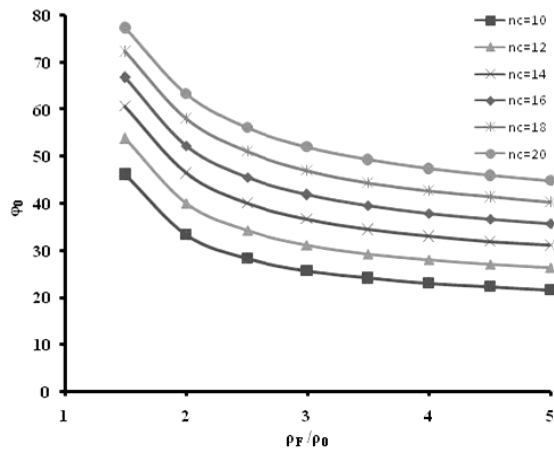
$$(a_c)_{i,i+1} = - \frac{\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \Delta \psi d\rho}{\int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} 2d\phi} \quad (20)$$

در معادله (۲۰)، i معرف شماره ریب است. علامت منفی در معادله (۲۰)، به این معناست که محور مختصات در سطح مقطع کوچک‌تر قرار گرفته است. خصوصیات سفتی یک سلول که به صورت تکرار ایجاد شده است، نماینده سفتی کل بخش تکرارشونده است. خصوصیات اورتوتروپیک به دست آمده برای اجسام مدور، در جهت محوری است. به عنوان نمونه برای سازه استوانه‌ای سفتی در جهت محوری برابر به عنوان $\bar{E}_x \frac{A}{L}$ است، که $A = 2\pi RH$ سطح مقطع سازه است.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{2E_h b_h c^4}{a_h} & \frac{2E_h b_h s^2 c^2}{a_h} & 0 \\ \frac{2E_h b_h s^2 c^2}{a_h} & \frac{2E_h b_h s^4}{a_h} + \frac{E_c b_c}{a_c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_h b_h s^2 c^2}{a_h} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$s = \sin \varphi, c = \cos \varphi$$

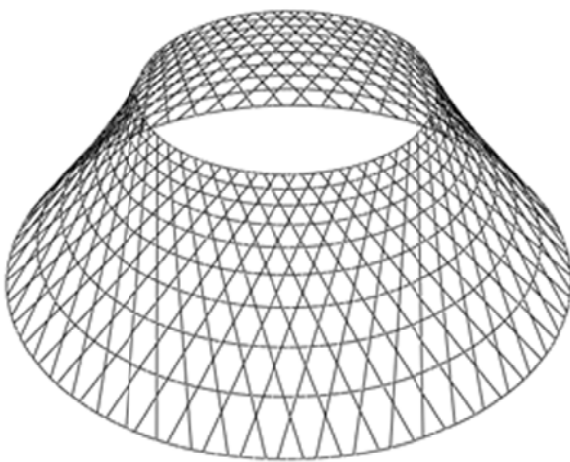
E_h مدول الاستیسیته ریب هلیکال و E_c مدول الاستیسیته ریب دایره‌ای است. معادله (۲۱) مستقیماً از تئوری، فرمولاسیون و فرضیاتی که مربوط به سفتی لایه و خواص الیاف است حاصل شده است. همچنین خصوصیات سفتی معادل در جهت محوری از معادله



شکل ۹- تغییرات ϕ با افزایش $\frac{\rho_F}{\rho_0}$ ($\alpha=34/7^\circ$)

مدل اجزای محدود

با مشخص شدن پارامترهای مستقل و وابسته در هندسه سازه مشبک مخروطی، می‌توان طراحی مدل اجزای محدود این سازه را انجام داد. با توجه به هندسه کلی مطرح شده برای طراحی سازه مشبک مخروطی، از شکل (۸) و شکل (۹) می‌توان زاویه ژئودسیک را در هر موقعیت ارتفاعی استخراج کرد. با استخراج این زاویه‌ها طراحی سازه مشبک صورت می‌گیرد. مدل سازه مشبک تولیدشده به صورت سیمی است و از المان تیر تیموشنکو برای شبکه‌بندی اجزای محدود استفاده شده است (شکل ۱۰). در مرجع [۱] به کاربرد المان تیر در تحلیل سازه مشبک مخروطی اشاره داشته است. همچنین با توجه به خصوصیات هندسی سازه مشبک، این المان، مناسب‌ترین نوع المان انتخابی است (شکل ۱۱).

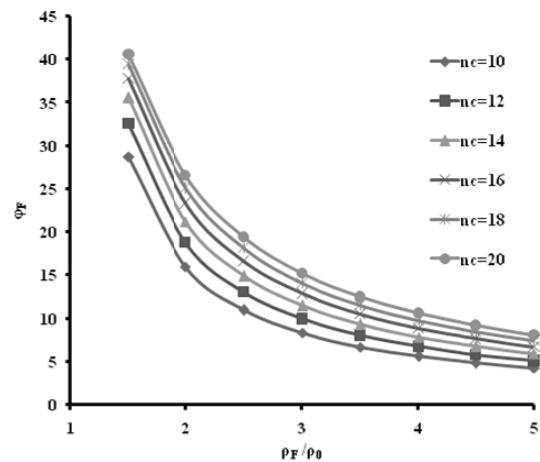


شکل ۱۰- مدل اجزای محدود سازه مشبک مخروطی ایجادشده در نرم‌افزار Abaqus

محدود با استفاده از معادلات طراحی مطرح شده برای مسیر ژئودسیک در بخش قبل ایجاد شده است. در ادامه، روند طراحی مدل اجزای محدود سازه مشبک مخروطی بیان شده و با مدل‌سازی و تحلیل اجزای محدود سازه مشبک مخروطی، رفتار مکانیکی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

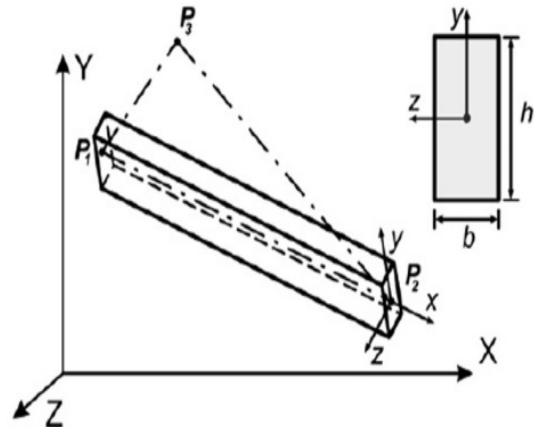
بررسی تغییرات هندسی سازه مشبک مخروطی

به منظور طراحی مسیر ریب‌های مارپیچی و دایره‌ای سازه مشبک مخروطی، لازم است زوایای ژئودسیک ریب‌های مارپیچی در سطح مقطع بزرگ و کوچک و همچنین موقعیت ارتفاعی سازه مخروطی استخراج شود. با توجه به معادلات (۱۶)، (۱۷) و (۲۰) به منظور طراحی سازه مشبک مخروطی، باید ابعاد کلی (ارتفاع، سطح مقطع بزرگ‌تر و کوچک‌تر) و زاویه رأس مخروط مشخص باشد. با این توصیف قطر بزرگ و کوچک مخروط مورد مطالعه در این پژوهش به ترتیب برابر ۲۵۰۰ و ۱۲۵۰ میلی‌متر و زاویه رأس مخروط برابر $34/7^\circ$ است. اکنون با توجه به مشخصات هندسی مطرح شده، تغییرات زاویه ژئودسیک در موقعیت‌های مختلف ارتفاعی و تعداد ریب‌های دایره‌ای مختلف استخراج می‌شود. با توجه به روابط مطرح شده در بخش قبل، تغییرات زاویه ژئودسیک در سطح مقطع بزرگ‌تر و کوچک‌تر با افزایش ارتفاع مخروط و تغییرات تعداد ریب دایره‌ای در شکل (۸) و شکل (۹) نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ارتفاع مخروط زوایای ژئودسیک دست‌خوش تغییر شده و به صورت غیرخطی کاهش می‌یابند. همچنین با افزایش تعداد ریب‌های محیطی در شرایط یکسان هندسی، زوایای ژئودسیک در هر مقطع کاهش می‌یابند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش تعداد ریب‌های محیطی تغییرات زاویه ژئودسیک در مقطع بزرگ‌تر نسبت به مقطع کوچک‌تر با شیب بیشتری کاهش می‌یابد.



شکل ۸- تغییرات ϕ با افزایش $\frac{\rho_F}{\rho_0}$ ($\alpha=34/7^\circ$)

سازه مخروط و در جهت محوری قابل استخراج است. به این ترتیب توزیع کرنش و تنش در مقاطع مختلف سازه مشبک در سه جهت ذکرشده قابل بررسی است. با استخراج ماتریس سفتی معادل می‌توان کرنش ایجاد شده در سازه مشبک را با توجه به توزیع فشار محوری استخراج کرد. بار اعمالی به میزان ۱ مگانیوتن بوده که به سطح مقطع کوچک‌تر به‌صورت فشاری وارد می‌شود. درجات آزادی ریب دایره‌ای در سطح مقطع بزرگ‌تر در هر ۶ جهت مقید شده است. در ادامه بررسی تغییرات متوسط کرنش محوری سازه مشبک به روش اجزای محدود و روش تحلیلی با تغییر پهنا و ضخامت ریب‌های سازه مشبک آورده شده است.



شکل ۱۱- نمایی از المان تیر مورد استفاده در تحلیل اجزای محدود [۹]

الف) چگونگی توزیع کرنش در ریب‌های مارپیچی برحسب تغییر ضخامت سازه به روش تحلیلی و اجزای محدود

توزیع کرنش به روش تحلیلی و اجزای محدود برای سازه مشبک مخروطی در شکل (۱۲) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که، با افزایش ضخامت ریب‌های مارپیچی و دایره‌ای کرنش ایجاد شده در سازه مشبک مخروطی به‌صورت غیرخطی کاهش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش ضخامت اختلاف نتایج تحلیلی و اجزای محدود افزایش یافته که این افزایش اختلاف، نشان‌دهنده کاهش دقت المان تیر برای اجرای تحلیل اجزای محدود است. به همین منظور برای تحلیل سازه مشبک مخروطی با افزایش ضخامت باید از المان دیگری از جمله المان سه‌بعدی^۳ استفاده کرد. نمایی از تحلیل اجزای محدود سازه مشبک مخروطی با ابعاد تعریف شده (ضخامت و پهنا به ترتیب ۱۸ و ۵/۷۵ میلی‌متر) تحت بار ۱ مگانیوتن در شکل (۱۳) نمایش داده شده است. در محدوده ضخامت ۱۸ میلی‌متر مقادیر ارائه‌شده در کانتور شکل (۱۳) در نمودار شکل (۱۲) قابل تشخیص است.

ب) چگونگی توزیع کرنش در ریب‌های مارپیچی برحسب تغییر پهنا سازه به روش تحلیلی و اجزای محدود

شکل (۱۴) نمایی از تغییرات کرنش در جهت محوری سازه مشبک مخروطی را با تغییر پهنا ریب‌های دایره‌ای و مارپیچی نمایش می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد با افزایش پهنا ریب‌های مارپیچی و دایره‌ای کرنش ایجاد شده در سازه مشبک مخروطی به‌صورت غیرخطی کاهش پیدا می‌کند.

قطر بزرگ و کوچک سازه مشبک مخروطی طراحی شده به ترتیب برابر ۲۵۰۰ میلی‌متر و ۱۲۵۰ میلی‌متر است. همچنین ارتفاع سازه برابر ۹۰۰ میلی‌متر است. مشخصات هندسی سازه مشبک مخروطی در جدول (۱) خلاصه شده است. همچنین خصوصیات مواد استفاده شده در سازه مشبک مخروطی در جدول (۲) آورده شده است. سازه مشبک مخروطی از تعدادی ریب دایره‌ای تشکیل شده است. فاصله ریب‌های دایره‌ای از یکدیگر در ارتفاع دستخوش تغییرات غیرخطی می‌شود.

جدول ۱- مشخصات هندسی سازه مشبک مخروطی مورد مطالعه

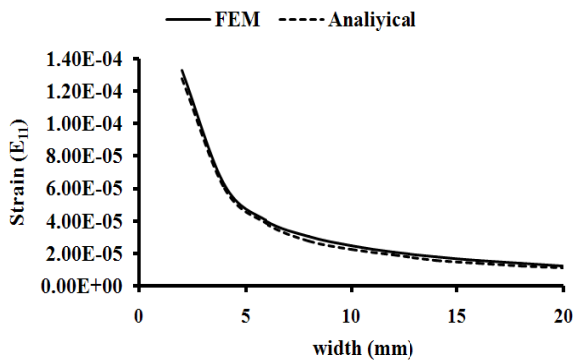
n_c	n_h	α_f	α_o	H	b_c	b_h
				(mm)		
۱۰	۵۳	۱۵/۹۸°	۳۳/۴۴°	۱۸	۴	۵/۷۵

جدول ۲- خصوصیات مواد استفاده شده در سازه مشبک مخروطی

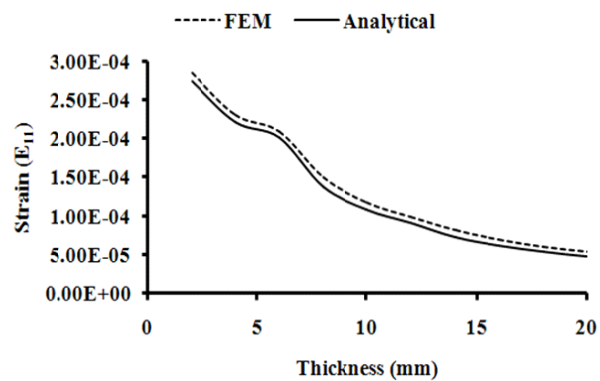
E_h (GPa)	$\bar{\sigma}_h$ (MPa)	m_h (Kg/m^3)	E_c (GPa)	m_c (Kg/m^3)
۸۰	۳۵۰	۱۴۵۰	۶۴	۱۴۱۰

مقایسه نتایج تحلیلی و عددی در تحلیل رفتار مکانیکی سازه مشبک مخروطی

برای استخراج توزیع تنش و کرنش در سازه مشبک مخروطی تحت بار محوری باید ماتریس سفتی سازه مشبک استخراج شود. ماتریس سفتی طبق معادلات (۲۰) و (۲۱) در جهت‌های محیطی، مار بر



شکل ۱۴- مقایسه روش تحلیلی و اجزای محدود کرنش ایجاد شده در سازه مشبک تحت فشار محوری با تغییر پهناهای ریبها ($H=18 \text{ mm}$)



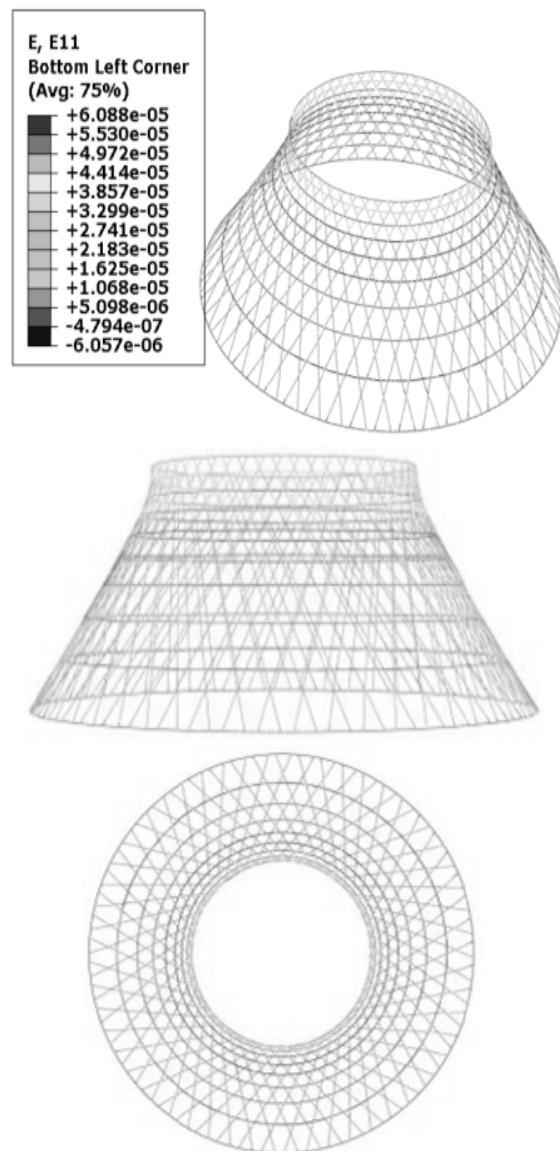
شکل ۱۲- مقایسه روش تحلیلی و اجزای محدود کرنش ایجاد شده در سازه مشبک تحت فشار محوری با تغییر ضخامت ریبها ($b_h = 5.75 \text{ mm}$)

نتیجه‌گیری

برای طراحی سازه مشبک مخروطی باید بهترین مسیر برای پیش‌یافتن را انتخاب کرد. مسیر ژئودسیک مناسب‌ترین مسیر برای افزایش استحکام سازه‌های مشبک مخروطی در مقابل بارهای محوری است. بنابراین تمامی معادلات طراحی بر مبنای مسیر پیش‌ژئودسیک استخراج می‌شود. فاصله ریب‌های دایره‌ای به عنوان مهم‌ترین پارامتر در طراحی سازه مشبک مخروطی نقش دارد. این پارامتر همچنین به زوایای ژئودسیک در مقاطع ارتفاعی مختلف وابسته است. مقایسه نتایج تحلیلی و اجزای محدود تغییرات کرنش محوری سازه مشبک مخروطی با افزایش ضخامت و پهنا، تحت بار محوری نشان می‌دهد که روش تحلیلی، بر اساس معادلات استخراج شده برای ارزیابی کرنش سازه مشبک مخروطی دقت بالایی دارد. علاوه بر آن با افزایش ضخامت و پهناهای مارپیچی و دایره‌ای کرنش ایجاد شده در سازه مشبک مخروطی کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] Vsiliev, V. V., Baryin, V. A. and Rasin, A. F., "Anisogrid Lattice Structures Survey of Development and Application," *Composite Structures*, Vol. 54, Issues 2-3, 2001, pp. 361-370.
- [2] Bunakov, V. A., *Design of Axially Compressed Composite Cylindrical Shells with Lattice Stiffeners, Optimal Design*, Editors, Vasiliev, V. V. and Gurdal, Z., Technomic Publishing USA, 1999, pp. 207-246.
- [3] Rasin, A. F. and Vasiliev, V. V., "Development of Composite Anisogrid Spacecraft Attach Fitting," *Proc. of the 11th European Conf. on Composite Materials*, Rhodes, Greece, May 31-June 3, 2004.
- [4] Poulsen, C. M., "Geodetic Construction, How the Vickers-Armstrong Wellington is Built: Solving Novel



شکل ۱۳- نمایی از کرنش محوری سازه مشبک مخروطی

- Applications”, *Composite Structures*, Vol. 76, Issues 1-2, 2006, pp. 182-189.
- [8] Morozov, E. V., Lopatin, A. V. and Nesterov, V. A., “Finite Element Modelling and Buckling Analysis of Anisogrid Composite Lattice Cylindrical Shells,” *Composite Structures*, Vol. 93, Issue 2, 2011, pp. 308–323.
- [9] Morozov, E. V., Lopatin A. V. and Nesterov, V. A., “Buckling Analysis of Anisogrid Composite Lattice Conical Shells,” *Composite Structures*, Vol. 93, Issue 12, 2011, pp. 3150–3162.
- and Sometimes Difficult Production Problems”, *Aircraft Production*, 1940, pp. 143–148.
- [5] Chen, H. J. and Tsai, S. W., “Analysis and Optimum Design of Composite Grid Structures”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 4, 1996, pp. 503-534.
- [6] Totaro, G. and Gürdal, Z., "Optimal Design of Composite Lattice Shell Structures for Aerospace Applications", *Aerospace Science and Technology*, Vol. 13, Issues 4-5, 2009, pp. 157–164.
- [7] Vsiliev, V. V. and Rasin, A. F., “Anisogrid Composite Lattice Structures for Spacecraft and Aircraft