

# Modeling of Space Objects Propagation, Prediction of Closest Approaches among Satellites, and Assessment of Maximum Collision Probability

M. Navabi<sup>1\*</sup> and R. Hamrah<sup>2</sup>

1, 2. Department of Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, GC.

\*Velenjak, Tehran, IRAN

Science.edu@gmail.com

*In this paper, a precise propagation model which takes into account the effects of the atmospheric drag and gravitational harmonics is developed and presented using available Two Line Element (TLE) data. Moreover, the prediction of the trajectory of space objects (e.g. the operational and non-operational satellites and space debris) and their orbital data is performed. Then, the 2009 prominent collision between the Cosmos2251 and Iridium33 satellite is simulated and the maximum probability of their collision is computed by implementing the propagation algorithm and probabilities Theory, and finally the results are discussed. Therefore, the precise position and velocity of each space object at any time, as well as their collision probability will be determined, and if necessary, the time available to enact collision avoidance maneuver will be obtained. The success and accuracy of an avoidance maneuver is affected by the precision of the propagation model, the exact computation of collision probability, and finally the maneuver mechanism which are utilized.*

**Keywords:** Space debris, Propagation model, Two line element set, Maximum collision probability, Gaussian density function, Encounter plane, Positional covariance ellipsoid

---

1. Assistante Professor (Corresponding Author)

2. M.Sc.

# مدل سازی انتشار اشیای فضایی، پیش بینی تقریب‌های بحرانی ماهواره‌ها و تخمین حداکثر احتمال تصادم اشیای فضایی

محمد نوابی<sup>۱\*</sup> و رضا همراهِ<sup>۲</sup>

۱ و ۲- گروه مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی

\* تهران، ولنجک

m\_navabi@sbu.ac.ir

در این مقاله با استفاده از داده‌های در دسترس از مجموعه‌های امان‌های دوسطری (TLE) به استخراج و ارائه یک مدل انتشار دقیق در حضور اثرات گرانشی و درگ اتمسفری پرداخته، و نیز پیش‌بینی مسیر حرکت و استخراج اطلاعات مداری اشیای فضایی از قبیل ماهواره‌های عملیاتی و غیرعملیاتی و همچنین پس‌ماندهای فضایی می‌پذیرد. سپس با استفاده از پیاده‌سازی الگوریتم مدل انتشار و تئوری احتمالات، به مدل‌سازی تصادم دو ماهواره کاسموس ۲۲۵۱ و ایریدیوم ۳۳ و نیز محاسبه حداکثر احتمال برخورد آنها پرداخته شده و نتایج مورد بحث قرار می‌گیرند. به این ترتیب می‌توان موقعیت و سرعت هر یک از ماهواره‌ها در روز و لحظه تصادم و نیز امکان برخورد آن با اشیای دیگر را پیش‌بینی کرد و در صورت لزوم، مناسب‌ترین زمان انجام مانورهای جلوگیری از برخورد را، مشخص کرد که موفقیت‌آمیز بودن و دقت این مانور متأثر از دقت مدل انتشار به کار رفته، محاسبه دقیق احتمال برخورد و همچنین مکانیزم مانور خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: پس‌ماند فضایی، مدل انتشار، مجموعه امان دو سطری، حداکثر احتمال برخورد، تابع چگالی گوسین، صفحه رویارویی، بیضی‌گون کواریانس مکانی

$R_e$	شعاع استوایی زمین
$P_{nm}$	چندجمله‌ای لژاندر درجه n و مرتبه m
$P_n$	چندجمله‌ای لژاندر درجه n و مرتبه صفر
$J_n$	ضرایب هارمونی زونال مرتبه صفر
$C_{n,m}$	ضرایب هارمونی tesseral برای $n \neq m$
$S_{n,m}$	ضرایب هارمونی sectoral برای $n = m$
$x, y, z$	مختصات مکان ماهواره یا شیء فضایی در دستگاه اینرسی
$R_c$	شعاع شیء مرکب
AR	نسبت محور اصلی به فرعی بیضی کواریانس تصویر شده
$x_m, y_m$	موقعیت نسبی تصویر شده در دستگاه رویارویی
$\sigma_{x,y,z}$	انحراف معیار هر محور
$t_o$	زمان مبدأ تاریخ
$n_o$	حرکت متوسط در زمان مبدأ تاریخ

## فهرست اختصارات

TLE	Two Line Elements
NAADC	North American Aerospace Defense Command
SGP	Simplified General Perturbation
SDP	Simplified Deep-Space Perturbation

## فهرست علائم

$\mu$	پارامتر جاذبه‌ای
$r$	فاصله از مرکز زمین
$\beta$	عرض جغرافیایی
$\lambda$	طول جغرافیایی

۱- استادیار (نویسنده مخاطب)

۲- کارشناس ارشد مهندسی فضایی

در پی به روز شده تا یک قابلیت مورد قبول از پیش‌بینی موقعیت تمام اشیای فضایی حفظ شود [۳].

در این مقاله، ابتدا به استخراج و ارائه یک مدل انتشار دقیق که اثرات گرانشی و درگ اتمسفری را در نظر می‌گیرد، پرداخته می‌شود. سپس با استفاده از پیاده‌سازی مدل انتشار در محیط نرم‌افزار متلب، به مدل‌سازی تصادم دو ماهواره کاسموس ۲۲۵۱ (یک ماهواره غیرعملیاتی یا پس‌ماند فضایی) و ایریدیوم ۳۳ (یکی از ماهواره‌های عملیاتی منظومه مخابراتی ایریدیوم) پرداخته می‌شود. همچنین نتایج حاصل از این مدل با دو مدل مسئله دوجسمی و مدل اغتشاشات  $J_2$  مقایسه شده و کارایی هر مدل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از TLE‌های موجود از دو ماهواره کاسموس ۲۲۵۱ و ایریدیوم ۳۳ به عنوان ورودی مدل‌های انتشار، موقعیت و سرعت هر یک از ماهواره‌ها در روز و لحظه تصادم پیش‌بینی شده، که هم کارایی TLE‌های قدیمی و جدید مورد استفاده در مدل‌ها با هم مقایسه شوند و هم به دقت مدل‌ها در پیش‌بینی موقعیت دو ماهواره در لحظه برخورد (با توجه به اینکه این دو ماهواره به هم اصابت کرده‌اند) پی برده شود. سپس به منظور ارزیابی خطر احتمالی، حداکثر احتمال برخورد دو ماهواره با استفاده از فاصله تقریب‌های بحرانی پیش‌بینی شده، محاسبه می‌شود. از این‌رو بهترین زمان برای پیشگیری و حتی طرح‌ریزی یک مانور تعیین خواهد شد که موفقیت‌آمیز بودن و دقت این مانور متأثر از دقت مدل انتشار به کار رفته، احتمال تصادم تخمین زده شده و همچنین مکانیزم مانور خواهد بود.

## مدل‌های انتشار

مدل‌های انتشار فضایی با استفاده از اطلاعات کنونی از موقعیت و سرعت یک ماهواره، موقعیت و سرعت ماهواره را در آینده پیش‌بینی می‌کنند. هر ماهواره در طول مسیر خود با اغتشاشات و مزاحمت‌هایی روبه‌رو است که حرکت آن را پیچیده می‌کنند. این اغتشاشات بر اثر هارمونی‌های جاذبه‌ای، درگ، تشعشعات، و اثرات جاذبه دیگر اجسام مانند ماه و خورشید ایجاد می‌شوند. این مدل‌ها اثر این آشفتگی‌ها و اغتشاشات را پیش‌بینی می‌کنند. مدل‌های انتشار فضایی اصولاً توسط آژانس‌هایی که اشیای فضایی را ردیابی می‌کنند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. به علت اینکه تنها تعداد کمی تلسکوپ برای تماشای مداوم اشیا در همه زمان، وجود دارند، مدل‌های انتشار همواره مورد نیاز هستند. بنابراین، مکان و سرعت یک شی یکبار تشخیص داده می‌شود و سپس اگر مکان آینده شی را بخواهیم، با استفاده از انتشاردهنده می‌توانیم دریابیم که آن شیء کجا خواهد بود. تمامی اشیای فضایی توسط نورا، به

$e_0$	خروج از مرکز مدار در زمان مبدأ تاریخ
$\omega_0$	زاویه شیب مداری مدار در زمان مبدأ تاریخ
$\Omega_0$	بعد گرہ صعودی در زمان مبدأ تاریخ
$M_0$	آنومالی متوسط در زمان مبدأ تاریخ
$B^*$	ضریب درگ اتمسفری
$k_e$	$\sqrt{GM} = 0.0743669161, (\text{Earth radii})^{1.5} / \text{min}$
$G$	ثابت جهانی جاذبه
$M$	جرم زمین
$m_{o\_dd}$	جمله‌های مرتبه فرد سری مرتبه m
$m_{ev\_en}$	جمله‌های مرتبه زوج سری مرتبه m
$m_{0\_0}$	جمله‌های مرتبه صفر سری مرتبه m
$P$	احتمال تصادم دو شیء فضایی

## مقدمه

از آنجاکه محموله‌های فعال موجود در فضا در یک رژیم مداری محدود فعالیت می‌کنند و مدار خود را با بدنه و مراحل نهایی راکت‌هایی که آنها را در مدار قرار داده‌اند و نیز پس‌ماندهای مربوط به مأموریت به اشتراک می‌گذارند، این پتانسیل وجود دارد که هر یک از این محموله‌ها با اشیای دیگر در مدار برخورد کنند. در سرعت‌های نسبی حداکثر ۱۵ کیلومتر بر ثانیه، نتایج چنین تصادمی بسیار فاجعه‌آمیز خواهد بود [۱]. این سناریوی نگران‌کننده، باعث رشد شایان توجهی از تحقیقات مرتبط با سنجش، مدل‌سازی یا مانورهای اجتناب از برخورد شده است. اساساً از سنجش‌ها، مشخصه‌هایی از قبیل المان‌های مداری، وضعیت، اندازه و شکل شیء، طول عمر مداری، ضریب بالستیک، جرم شیء، و خواص فیزیکی و شیمیایی مواد، برای اشیای فضایی استخراج می‌شوند. سپس یک کاتالوگ که مجموعه‌ای از مشخصات و اطلاعات ضبط و ثبت شده از جمعیت پس‌ماندهاست، از اندازه‌گیری‌ها و سنجش‌های مذکور استخراج می‌شود. از آنجاکه برای مدل‌سازی انتشار اشیای فضایی، نیاز به اطلاعات مداری و گاهاً اطلاعات محیطی از اشیاء وجود دارد، داده‌هایی شامل اطلاعاتی پیرامون مدار ماهواره در قالب مجموعه المان‌های دوسطری یا TLE توسط نورا<sup>۲</sup> جمع‌آوری و منتشر می‌شوند که دربرگیرنده تمامی شش المان مداری هستند. این TLE‌ها به عنوان ورودی مدل‌های انتشار، تولید و استفاده می‌شوند [۲]. انتشار داده‌های TLE توسط نورا، حتی تا به امروز ادامه دارد و تنها منبع عمومی داده است که اکثر اشیای در حال گردش به دور زمین را پوشش می‌دهد. این TLE‌ها به‌طور پی

$$B(r, \beta, \lambda) = (\mu/r) \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (R_e/r)^n J_n P_n(\sin \beta) + \sum_{m=1}^n (R_e/r)^n (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \beta) \right] \right\} \quad (3)$$

در رابطه فوق مشاهده می شود که هارمونی های زونال، تنها به عرض جغرافیایی بستگی دارند. این هارمونی ها یکی از نتایج پخی زمین هستند. حال اگر بخواهیم تنها اثر هارمونی دوم زونال یعنی  $J_2$  را در نظر بگیریم و اثرات آن را بررسی کنیم،  $U(r, \beta, \lambda)$  ساده شده و به صورت زیر در می آید:

$$U(r, \beta, \lambda) = -(\mu/r) \left[ 1 - \sum (R_e/r)^n J_n P_n(\sin \beta) \right] \quad (4)$$

$$= (\mu/r) [U_0 + U_{J_2}]$$

که در آن

$$U_0 = -1$$

و

$$U_{J_2} = (R_e/r)^2 J_2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \beta - 1)$$

تابع پتانسیل ساده شده برای این مسئله به صورت زیر است:

$$U = (\mu/r) [U_0 + U_{J_2}] = \frac{\mu}{r} \left\{ -1 + (R_e/r)^2 J_2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \beta - 1) \right\} \quad (5)$$

که در آن

$$\sin \beta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

بنابراین نیروهای گرانشی وارد بر ماهواره در حالتی که اثر پخی زمین و اغتشاشات  $J_2$  بر حرکت ماهواره در نظر گرفته شود، از رابطه  $F = -grad U(x, y, z)$  به دست آمده و به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \mu \left[ -\frac{x}{r^3} + A_{J_2} \left( 15 \frac{xz^2}{r^7} - 3 \frac{x}{r^5} \right) \right] \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \mu \left[ -\frac{y}{r^3} + A_{J_2} \left( 15 \frac{yz^2}{r^7} - 3 \frac{y}{r^5} \right) \right] \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \left[ -\frac{z}{r^3} + A_{J_2} \left( 15 \frac{z^3}{r^7} - 9 \frac{z}{r^5} \right) \right] \end{cases} \quad (6)$$

$$J_2 = 1082.6 \times 10^{-6} \quad \text{و} \quad A_{J_2} = \frac{1}{2} J_2 R_e^2$$

### معادلات حاکم برای مدل انتشار SGP4

این مدل از استخراج معادلات حاکم بر حرکت ماهواره ها با در نظر گرفتن درگ و هارمونی های جاذبه ای، به دست می آید و ابتدا با بررسی تابع پتانسیل شروع می شود:

اشیای نزدیک زمین (پریود کمتر از ۲۲۵ دقیقه) یا اشیای فضای ژرف (پریود بزرگ تر یا مساوی ۲۲۵ دقیقه) تقسیم بندی می شوند. مدل هایی که برای اشیای نزدیک زمین به کار گرفته می شوند با نام SGP و مدل هایی که برای اشیای فضای ژرف به کار می روند، با نام SDP شناخته می شوند. با توجه به پریود مداری اشیای TLE ها خود به خود و پی در پی با مدل نزدیک زمین یا فضای ژرف تولید می شوند. سپس کاربر می تواند پریود شیء مورد نظر خود را محاسبه کرده و دریابد که کدام مدل پیش بینی را باید به کار گیرد [۳]. در قسمت بعدی به استخراج و ارائه یک مدل انتشار دقیق به نام SGP4 و دو مدل دوجسمی و  $J_2$  پرداخته می شود.

### معادلات حاکم برای مدل دو جسمی

مسئله دوجسمی یک وضعیت ایده آل است که در آن تنها دو جسم وجود دارند که در یک حرکت نسبی در میدان جاذبه گرانشی قرار گرفته اند. در مسائل دوجسمی فرض بر آن است که حرکت ماهواره تنها نتیجه جاذبه بین زمین و ماهواره است و از هر گونه اغتشاش وارد بر ماهواره صرف نظر می شود و اجرام دیگر به قدر کافی در فواصل دور در نظر گرفته شده اند به طوری که هیچ گونه نیرویی از طرف جسم سوم بر این دو وارد نمی شود [۴].

از آنجاکه نیروی وارد شده از طرف زمین بر یک جسم در بیرون از آن، یک نیروی پایستار است، می توان آن را از گرادین تابع پتانسیل اسکالر  $U(r) = -\frac{\mu}{r}$  استخراج کرد. البته این گفته هنگامی صحیح است که زمین به صورت یک جرم متمرکز در یک نقطه یا به عنوان یک کره همگن فرض شود. بنابراین معادله دیفراسیل مرتبه دوم مسئله دوجسمی که حرکت جسمی را نسبت به جسمی دیگر کنترل می کند به صورت زیر است:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

که در آن  $\mu$  پارامتر جاذبه ای و  $r$  فاصله از مرکز زمین است.

### معادلات حاکم برای مدل اغتشاشات J2

یکی از مهم ترین نیروهای اغتشاشی وارد بر ماهواره های در حال گردش به دور زمین از ناهمگنی زمین ناشی می شود. کره زمین یک کره کامل نیست، و نیز توزیع جرمی آن همگن نیست. این حقیقت فیزیکی، شتاب های اغتشاشی بر اجسام به دور زمین تولید می کند. از این رو که زمین یک جسم یخ است باید فاکتورهای تصحیح به تابع اسکالر پتانسیل اضافه شود [۴]، پس خواهیم داشت:

$$U(r, \beta, \lambda) = -\frac{\mu}{r} + B(r, \beta, \lambda) \quad (2)$$

که در آن

$$a_1 = \left(\frac{k_e}{n_o}\right)^{2/3}, \delta_1 = \frac{3}{2} \frac{k_2}{a_1^2} \frac{(3 \cos^2 i_o - 1)}{(1 - e_o^2)^{1.5}} \quad (11)$$

همچنین تأثیرات سکولار<sup>۴</sup> درگ اتمسفری و جاذبه، در مدل لحاظ شده و هر یک از المان‌ها تحت تأثیر هارمونی‌های زمین و درگ تغییر می‌یابند. معادلات مربوط به تأثیرات سکولار و نیز جمله‌های تناوب‌های پریود بلند و پریود کوتاه به‌طور کامل در پیوست (۱) توضیح داده شده‌اند.

با توجه به مراحل محاسباتی اشاره شده در پیوست (۱) بردارهای وضعیت واحد با استفاده از روابط زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{aligned} U &= M \sin u_k + N \cos u_k \\ V &= M \cos u_k - N \sin u_k \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن

$$N = \begin{cases} N_x = \cos \Omega_k \\ N_y = \sin \Omega_k \\ N_z = 0 \end{cases} \quad M = \begin{cases} M_x = -\sin \Omega_k \cos i_k \\ M_y = \cos \Omega_k \cos i_k \\ M_z = \sin i_k \end{cases} \quad (13)$$

در نهایت موقعیت و سرعت با استفاده از دو رابطه زیر داده می‌شود [۳]:

$$\vec{r} = r_k U, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} U + (r\dot{v})V \quad (14)$$

### محاسبه حداکثر احتمال برخورد

تصمیم‌گیری برای انجام یک مانور اجتناب از برخورد بر اساس تحلیل‌های هزینه-خطر است و نیازمند سنجش دقیقی از خطر است. مانورهای اجتناب از برخورد در فضاپیماها به دلیل مصرف سوخت، باعث کاهش طول عمر آنها می‌شوند و نیز پتانسیل و اماندگی سیستم پیشران‌ها با روشن شدن‌های اضافی پیشران‌ها، افزایش خواهد یافت. بنابراین خطر برخورد باید آنقدر بالا باشد که بتوان از هزینه انجام یک مانور چشم‌پوشی کرد [۶]. زمانی که احتمال تصادم از یک حد تعیین شده توسط کاربر تجاوز می‌کند، معمولاً اقداماتی توسط ماهواره اصلی صورت می‌گیرد. اگر ماهواره دوم قابل کنترل باشد، کاربر آن باید قبل از زمان فاصله تقرب دو ماهواره، ارتباطی برای تعیین اینکه آیا یک مانور اجتناب طرح‌ریزی شده است یا خیر، با آن برقرار کند. اگر زمان اجازه دهد، باید داده‌های بهتر برای تخمین دوباره احتمال برخورد، جمع‌آوری شود. بنابراین، ابتدا محاسبه احتمال خطر تصادم اشیای فضایی در اولویت توجه قرار می‌گیرد.

الگوریتم‌های مختلفی برای برآورد احتمال برخوردها توسط دانشمندان متعدد پیشنهاد شده‌اند. این الگوریتم‌ها از پارامترهایی

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

که  $U$  تابع پتانسیل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\mu}{r} + \frac{\mu k_2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \beta) \\ &+ \frac{\mu k_4}{r^5} (1 - 10 \sin^2 \beta + \frac{35}{3} \sin^4 \beta) \\ &+ \frac{\mu A_{3,0}}{r^4} \left( \frac{-3}{2} \sin \beta + \frac{5}{2} \sin^3 \beta \right) \\ &+ \frac{\mu A_{5,0}}{r^6} \left( \frac{15}{8} \sin \beta - \frac{35}{4} \sin^3 \beta + \frac{63}{8} \sin^5 \beta \right) \end{aligned} \quad (7)$$

و در آن

$$k_2 = \frac{1}{2} J_2 R_e^2$$

$$A_{3,0} = -J_3 R_e^3$$

$$k_4 = -\frac{3}{8} J_4 R_e^4$$

$$A_{5,0} = -J_5 R_e^5$$

و

$$J_3 = -2.53 \times 10^{-6}, \quad J_4 = -1.61 \times 10^{-6}$$

در واقع مدل جاذبه در این مدل انتشار، اثرات ۵ هارمونی زونال اول زمین را شامل می‌شود [۳ و ۵] و مدل اتمسفر آن یک اتمسفر استاتیک، غیرچرخشی، و از نظر کروی متقارن را که چگالی آن می‌تواند توسط تابع چگالی قانون توانی<sup>۳</sup> زیر بیان شود، در نظر می‌گیرد [۵].

$$\rho = \rho_o \left( \frac{q_o - s}{r - s} \right)^\tau \quad (8)$$

که در آن  $r$  فاصله از مرکز زمین و  $q_o$  و  $s$  پارامترهای ارتفاع تابع تابع چگالی قانون توان هستند و  $\tau$  در تمام معادلات ساده شده، مقدار ۴ است. جمله‌های بسیاری از معادلات مدل SGP4 مستقل از زمان هستند و الگوریتم، با محاسبه چندین جمله ثابت آغاز می‌شود. در ابتدا حرکت متوسط ( $n_o''$ ) و محور نیم قطر اصلی ( $a_o''$ )، از المان‌های epoch محاسبه می‌شوند [۳]:

$$n_o'' = \frac{n_o}{1 + \delta_o} \quad (9)$$

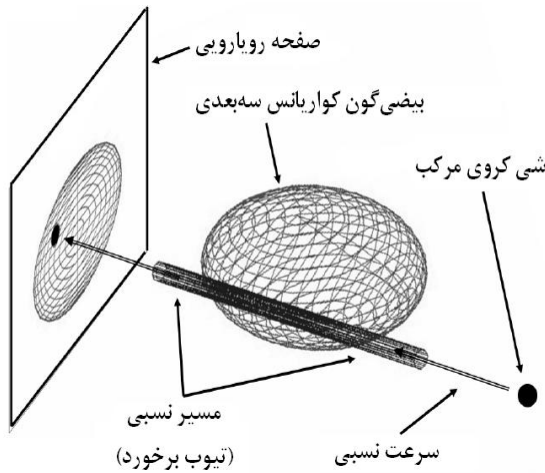
$$a_o'' = \frac{a_o}{1 - \delta_o}$$

که در آن

$$a_o = a_1 \left( 1 - \frac{1}{3} \delta_1 - \delta_1^2 - \frac{134}{81} \delta_1^3 \right), \delta_o = \frac{3}{2} \frac{k_2}{a_o^2} \frac{(3 \cos^2 i_o - 1)}{(1 - e_o^2)^{1.5}} \quad (10)$$

و نیز

می پیوندند که فاصله بین مرکز دو شیء تصویر شده کمتر از جمع شعاع های آنها شود [۷].



شکل ۱- تجسمی از رویارویی شیء مرکب و کواریانس مرکب

همانگونه که قبلاً ذکر شد، بعد از تصویر کردن اشیاء و کواریانس های آنها بر روی صفحه رویارویی عمود بر بردار سرعت نسبی، ابعاد مسئله از سه بعد به دو بعد کاهش می یابد. برای کواریانس، محورهای صفحه برخورد می توانند منطبق بر محورهای اصلی و فرعی بیضی خطاهای مرکب تصویر شده، باشند. بنابراین، احتمال برخورد P از رابطه زیر به دست می آید [۸]:

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-OBJ}^{OBJ} \int_{-\sqrt{OBJ^2-x^2}}^{\sqrt{OBJ^2-x^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+x_m}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y+y_m}{\sigma_y}\right)^2\right]\right] dx dy \quad (16)$$

با توجه به رابطه (۱۶) پارامترهایی مانند بحرانی ترین فاصله تقرب دو شیء، OBJ شعاع شیء مرکب و AR نسبت دو قطر بیضی کواریانس تصویر شده، مورد نیاز هستند.  $\sigma_x$  (محور اصلی) و  $\sigma_y$  (محور فرعی) انحرافات استاندارد و  $(x_m, y_m)$  مکان نسبی تصویر شده در صفحه دوعبدهی برخورد هستند که در شکل (۲) نیز نشان داده شده اند. معادله (۱۶) به کمک روش تابع خطا به انتگرال یگانه زیر تبدیل می شود که از حل عددی آن می توان به مقدار احتمال برخورد دو شیء فضایی رسید.

$$P = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sigma_x} \int_{-OBJ}^{OBJ} \left[ \operatorname{erf}\left[\frac{y_m + \sqrt{OBJ^2-x^2}}{\sigma_y\sqrt{2}}\right] + \operatorname{erf}\left[\frac{-y_m + \sqrt{OBJ^2-x^2}}{\sigma_y\sqrt{2}}\right] \right] \exp\left[-\frac{(x+x_m)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx \quad (17)$$

مانند فاصله بین دو شیء، عدم قطعیت های مکانی و افزایش این عدم قطعیت ها در حین انتشار در زمان و نیز اندازه اشیاء استفاده می کنند. در این روش ها معمولاً برای احتمال، یک تابع چگالی گوسین فرض می شود. در این مقاله با استفاده از تئوری احتمالات و با استفاده از نتایج مدل انتشار به کار گرفته شده برای یافتن فاصله تقرب ها، از روشی مناسب برای محاسبه مقدار حداکثر احتمال برخورد استفاده می شود. تعیین احتمال برخورد، زمانی انجام می شود که یک شیء ثانویه از یک ناحیه ایمنی تعیین شده توسط کاربر تجاوز کند. عدم قطعیت های مکانی توسط چگالی های احتمال گوسین سه بعدی ارائه می شوند. این چگالی ها شکل ماتریس کواریانس را گرفته و می توانند از مراکز مراقبت های فضایی مستقل درخواست شوند [۱]. با توجه به تئوری احتمالات، احتمال برخورد دو شیء با انتگرال گیری تابع توزیع چگالی گوسین سه بعدی روی حجم جاروب شده توسط شیء مرکب متشکل از دو شیء فضایی، به دست می آید:

$$P = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \iiint_V \exp\left[\frac{-x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{-y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{-z^2}{2\sigma_z^2}\right] dx dy dz \quad (15)$$

فرضیات بسیاری وجود دارد که پیچیدگی مسئله را کاهش می دهند: به منظور حذف اطلاعات وضعیت مورد نیاز، شکل فیزیکی اشیاء کروی فرض می شود. موقعیت ها و سرعت ها تا زمان فاصله تقرب بحرانی انتشار می یابند. از آنجا که مدت زمان رویارویی دو شیء به اندازه کافی کوتاه است و سرعت نسبی به اندازه کافی زیاد است، حرکت نسبی خطی و کواریانس های مکانی در رویارویی، ثابت و ناهمبسته فرض می شود. در نقطه بحرانی ترین فاصله تقرب، عدم قطعیت مکانی هر شیء ترکیب شده و شعاع آنها نیز با هم جمع می شود [۷ و ۶]. همچنین یک صفحه عمود بر بردار سرعت نسبی در نظر گرفته شده که اشیاء و کواریانس آنها، به روی این صفحه تصویر می شوند و به این صفحه، صفحه رویارویی یا صفحه برخورد می گویند [۷].

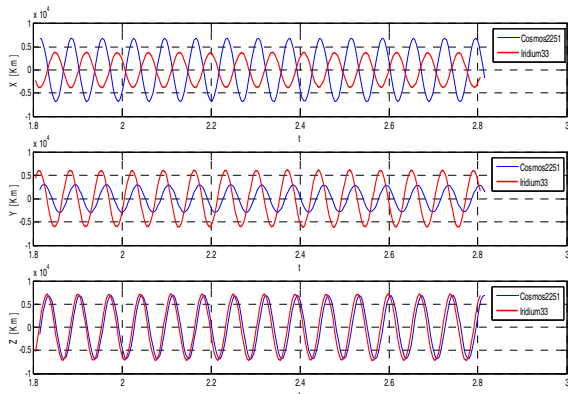
با این تصویر کردن، رابطه احتمال به یک انتگرال دوگانه کاهش می یابد که می توان با استفاده از روش تابع خطا آن را به یک انتگرال یگانه، ساده کرد. با توجه به شکل (۱)، شیء ثانویه از میان بیضی گون کواریانس مرکب گذشته و یک مسیر تیوب مانند ایجاد می کند. این تیوب در صفحه دو بعدی برخورد، به یک دایره تبدیل می شود. یک تلاقی زمانی رخ می دهد که تیوب شیء ثانویه، با شیء اصلی تماس پیدا کند. به این معنا که در صفحه برخورد این امر زمانی به وقوع



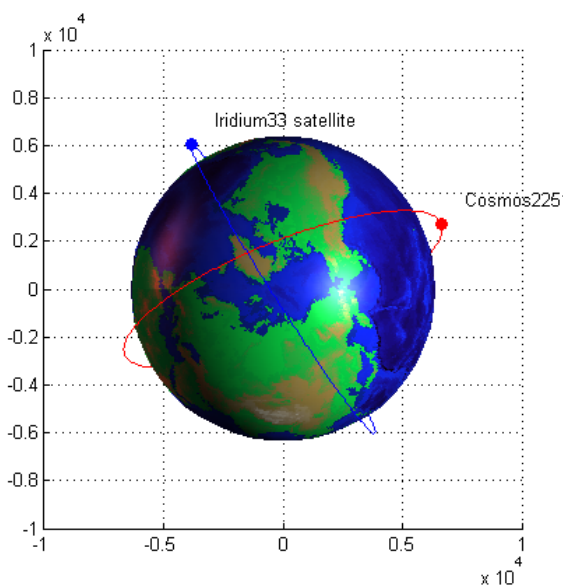
**جدول ۲-** نتایج شبیه سازی مدل انتشار با استفاده از TLE های مختلف

فاصله پیش بینی شده دو ماهواره از هم (Km)	زمان TLE استفاده شده برای پیش بینی
۵۳/۷۱۸۵	۱ ماه قبل از برخورد
۴/۱۸۲۲	۷ روز قبل از برخورد
۳/۳۹۰۳	۶ روز قبل از برخورد
۱/۶۴۶۸	۵ روز قبل از برخورد
۱/۶۲۳۸	۴ روز قبل از برخورد

نمودار موقعیت برای این دو ماهواره که با استفاده از یک TLE به تاریخ ۳ روز قبل از لحظه برخورد و بر اساس مدل SGP4 رسم شده اند، تغییرات موقعیت دو ماهواره را از ۹ فوریه تا لحظه برخورد در شکل (۳) نشان می دهند و موقعیت دو ماهواره در ۹ فوریه و در لحظه انتشار TLE در شکل (۴) آمده اند.



**شکل ۳-** نمودار تغییرات موقعیت دو ماهواره از ۹ فوریه تا روز برخورد



**شکل ۴-** موقعیت دو ماهواره در ۹ فوریه و در لحظه انتشار TLE

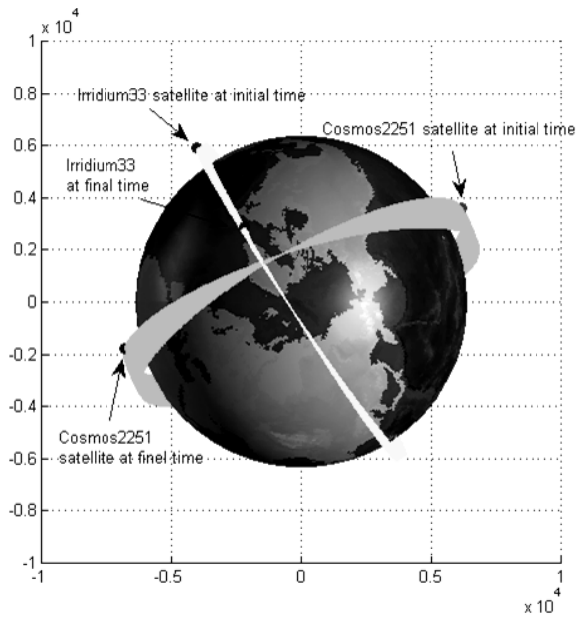
**جدول ۱-** مشخصات دو ماهواره

نام ماهواره	ایریدیوم ۳۳	کاسموس ۲۲۵۱
کد شناسایی NORAD	۲۴۹۴۶	۳۳۸۰۵
حضیض (km)	۷۸۵/۵	۶۸۶/۶
اوج (km)	۷۹۵/۲	۷۸۵
زاویه شیب مداری (درجه)	۸۶/۴	۷۴
پریود مداری (دقیقه)	۱۰۰/۵	۹۹/۴
محور Semi major (km)	۷۱۶۱/۴	۷۱۰۶/۸
تاریخ پرتاب	۱۴ سپتامبر ۱۹۹۷	۱۶ ژوئن ۱۹۹۳
کشور مالک	ایالات متحده امریکا	روسیه

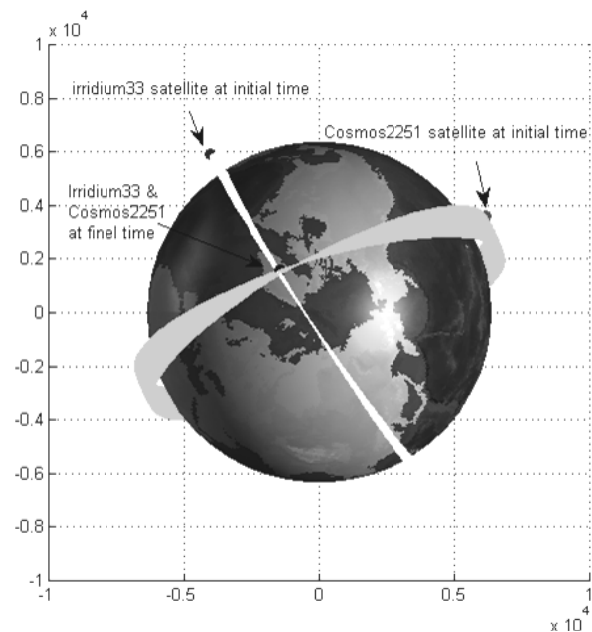
بدین منظور ابتدا با استفاده از یک TLE به عنوان ورودی مدل اول یعنی مدل دوجسمی، نتایج انتشار مدار در طول یک هفته به دست آمد که با توجه به اینکه در این مدل هیچ اغتشاشی بر ماهواره ها وارد نمی شود بنابراین المان های مداری هیچ تغییری نکرده و موقعیت دو ماهواره همواره ثابت خواهد ماند. در مدل  $J_2$  بر اثر پخی زمین اغتشاشاتی بر مدارها وارد شده و باعث تغییر تدریجی در چند المان مداری و به دنبال آن تغییر موقعیت ماهواره ها در طول هفت روز زمان شبیه سازی می شود، اما این دو ماهواره به فاصله بحرانی نسبت به یکدیگر نرسیده و شاید برای پریودهای زیادتر، اغتشاشات  $J_2$  مؤثر واقع شده و برخورد دو ماهواره را نتیجه دهد. در مدل انتشار SGP4 که اثر اغتشاشات بیشتری مانند درگ و اثرات ۵ هارمونی زونال را در خود جای می دهد به خوبی با استفاده از همان TLE، نزدیکی دو ماهواره را در ۷ روز بعد به اندازه ۴/۱۸۲۲ کیلومتر (جدول ۲) پیش بینی می کند. بنابراین برای برخورداری از یک پیش بینی دقیق از احتمال تصادم، مدل مناسب مدل انتشار SGP4 خواهد بود. با انتخاب مدل انتشار مناسب فواصل این دو ماهواره توسط مدل انتشار با استفاده از TLE های قدیمی و جدید پیش بینی شدند و کارایی هر یک از TLE ها مورد ارزیابی قرار گرفت. TLE های استفاده شده، TLE های ۱ ماه و یک هفته قبل از برخورد هستند و نیز با استفاده از TLE های هر روز هفته آخر نیز پیش بینی هایی از فاصله این دو ماهواره صورت گرفته است که نتایج آن در جدول (۲) ارائه شده است. برای یک هفته قبل از برخورد و هر روز آن هفته، با استفاده از TLE هر روز، شبیه سازی از روز بعد از تاریخ TLE تا روز و ساعت برخورد صورت گرفته است. با توجه به نتایج حاصل از مدل انتشار با TLE های مختلف درمی یابیم که استفاده از TLE های قدیمی به عنوان ورودی مدل، وقوع این حادثه را به خوبی پیش بینی نمی کند درحالی که هر چه TLE های جدیدتر به کار گرفته می شوند، نتایج خبر از یک فاصله تقرب قابل ملاحظه در زمان مورد نظر می دهند.



بحرانی ۵۰۰ متر برای دو شیء فضایی دلخواه، احتمال برخورد نسبت به تغییرات انحرافات استاندارد در محور اصلی بیضی کواریانس برای اندازه‌های مختلف شیء کروی مرکب، به دست آمده که در شکل (۸) ارائه شده است و بیان می‌کند که با افزایش انحرافات استاندارد، احتمال برخورد افزایش یافته و به مقدار حداکثر احتمال تصادم می‌رسد. بعد از آن، افزایش بیشتر انحراف استاندارد باعث کاهش احتمال خواهد شد.

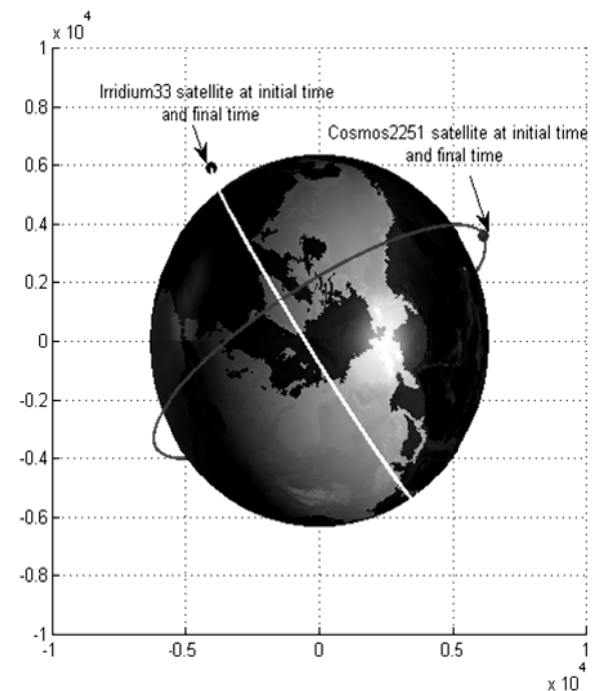


شکل ۶- موقعیت مدار دو ماهواره از ۳ فوریه تا روز برخورد در مدل J2



شکل ۷- موقعیت مدار دو ماهواره از ۳ فوریه تا روز برخورد در مدل SGP4

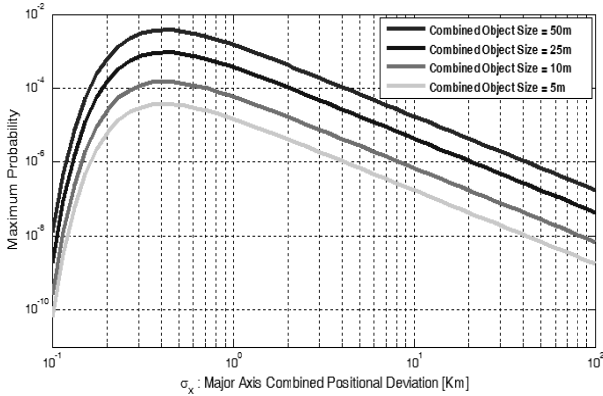
نتایج حاصل از شبیه‌سازی با مدل دو جسمی در شکل (۵)، با مدل J2 در شکل (۶) و با استفاده از مدل انتشار SGP4 در شکل (۷) نشان داده شده‌اند. در این سه شکل که در رسم آن به کمک متلب از TLEهای ۳ فوریه استفاده شده، موقعیت دو ماهواره نسبت به هم در لحظه اول و آخر مشخص شده‌اند. همان‌گونه که در شکل (۵) مشاهده می‌شود چون از مدل ساده و بدون هر گونه اغتشاش دوجسمی استفاده شده است، ماهواره‌ها در زمان شروع و پایان شبیه‌سازی که حدود ۱۰۰ پرپود مداری است، در مکان اولیه هستند. ولی با استفاده مدل کمی واقعی‌تر که فقط اثر J2 را در نظر می‌گیرد، موقعیت ماهواره‌ها پس از گذشت این زمان، دیگر در موقعیت اولیه نیستند ولی همچنان فاصله آنها در زمان واقعی وقوع حادثه، بحرانی مشاهده نمی‌شود که این موضوع در شکل (۶) نشان داده شده است. در شکل (۷) که نتایج براساس مدلی دقیق‌تر است، موقعیت ماهواره‌ها بسیار نزدیک به هم است و امکان وقوع یک حادثه تصادم پیش‌بینی شده نیست. البته با توجه به اینکه این حادثه ناگوار در تاریخ ۱۰ فوریه ۲۰۰۹ ساعت ۱۶:۵۶ وقوع یافته است، اهمیت و دقت این مدل بیشتر مشخص می‌شود.



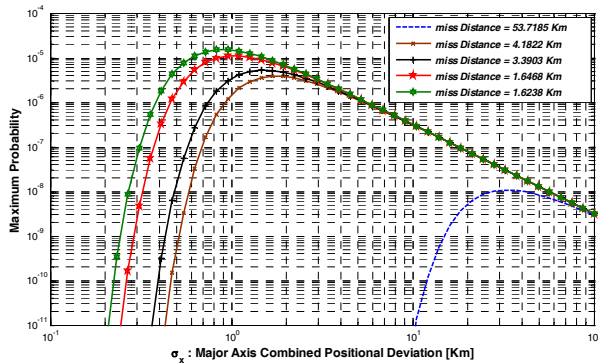
شکل ۸- موقعیت مدار دو ماهواره از ۳ فوریه تا روز برخورد در مدل دوجسمی

در ادامه، به منظور شبیه‌سازی تخمین احتمال تصادم دو شیء فضایی، نسبت منظری بیضی کواریانس به صورت کره در نظر گرفته می‌شود (AR=1) و با در نظر گرفتن یک فاصله تقرب

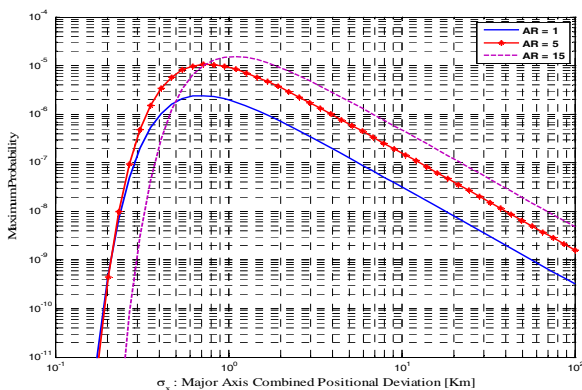
انحراف استاندارد باعث کاهش احتمال خواهد شد و مالک ماهواره ممکن است درکی اشتباه از ایمنی فرایند محاسبه احتمال برخورد داشته باشد. بنابراین، عدم قطعیت‌های هر یک از دو ماهواره باید دارای مقادیری باشند که مجموعشان از  $754/3$  متر تجاوز نکند.



شکل ۸- حداکثر احتمال برای  $AR = 1$  و اندازه‌های مختلف از شیء کروی مرکب (OBJ)



شکل ۹- حداکثر احتمال برای  $AR = 1$  و همه فاصله تقرب‌های پیش‌بینی شده



شکل ۱۰- حداکثر احتمال برای بهترین فاصله تقرب پیش‌بینی شده ( $1/6238$  کیلومتر) و  $AR = 1$

همانگونه که در شکل (۸) مشهود است، هرچه اندازه شیء کروی مرکب بزرگ‌تر باشد، احتمال برخورد آنها بیشتر خواهد بود. نتایج به‌دست آمده در این شبیه‌سازی در جدول (۳) ارائه شده‌اند.

جدول ۳- حداکثر احتمال برخورد تخمین زده شده برای OBJ‌های مختلف

حداکثر احتمال برخورد	اندازه شیء کروی مرکب (m)
$3/727 \times 10^{-3}$	۵۰
$9/323 \times 10^{-4}$	۲۵
$1/492 \times 10^{-4}$	۱۰
$3/73 \times 10^{-5}$	۵

سپس برای محاسبه حداکثر احتمال در زمان وقوع فاصله تقرب‌های بحرانی، شکل فیزیکی دو ماهواره ایریدیوم و کاسموس به‌صورت کروی و با شیء مرکب به شعاع  $4/3$  متر [۹] (اندازه میانگین ایریدیوم:  $2/6$  متر و کاسموس:  $1/7$  متر) فرض می‌شود. حداکثر احتمال برای تمام فاصله تقرب‌های پیش‌بینی شده مندرج در جدول (۲) تعیین شده و سپس تغییرات آن نسبت به انحرافات استاندارد، محور اصلی بیضی کواریانس رسم شده که در شکل (۹) آمده‌اند. پرواضح است که هرچه فاصله تقرب دو ماهواره کمتر باشد، احتمال برخورد آنها بیشتر خواهد بود. در شکل (۹) مشاهده می‌شود که حداکثر احتمال متعلق به کمترین فاصله تقرب است که با استفاده از TLE چهار روز قبل از برخورد، پیش‌بینی شده است. در نهایت، با استفاده از AR‌های بزرگ‌تر، محاسبات حداکثر احتمال برای بهترین پیش‌بینی انجام شده که نتایج در شکل (۱۰) ارائه شده‌اند. همانگونه که انتظار می‌رود، هر چه AR افزایش می‌یابد احتمال به مقداری بیشتر افزایش می‌یابد.

با توجه به شکل (۱۱) سه عامل وجود دارد که می‌توان در مورد آنها بحث کرد: فاصله تقرب، حداکثر احتمال، انحراف مکانی مرکب. با داشتن هر دو پارامتر، منحنی شکل (۱۱) می‌تواند برای محاسبه پارامتر دیگر مورد استفاده قرار بگیرد. در مثال استفاده شده در این مقاله، اندازه شیء مرکب داده شده است و ثابت است. برای مثال، در نظر بگیرید که دو ماهواره  $1/6238$  کیلومتر از هم فاصله دارند. در شکل (۹) مشخص است که حداکثر احتمال تقریباً  $2/4 \times 10^{-6}$  است. این بدین معناست که تجاوز از این مقدار غیرممکن است. اگر یک حد احتمال به مقدار  $10^{-5}$  برای طرح‌ریزی یک مانور اجتناب از برخورد تعریف شده باشد، آنگاه کاربر می‌تواند مطمئن باشد که دیگر نیاز به اقدامات اجتناب از تصادم نیست و خطری ماهواره را تهدید نمی‌کند. شکل (۱۱) همچنین یک انحراف مکانی مرکب به اندازه  $754/3$  متر را نشان می‌دهد. این نقطه‌ای است که بعد از آن، افزایش بیشتر

برای طرح‌ریزی یک مانور اجتناب از برخورد، برای صاحبان ماهواره‌ها امکان‌پذیر خواهد بود.

## مراجع

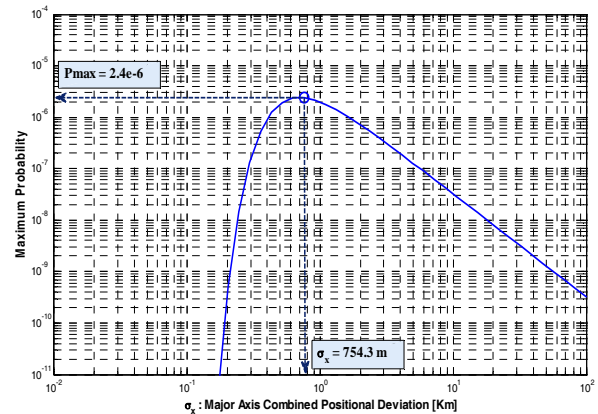
- [1] Kelso, T. S. and Alfano, S., "Satellite Orbital Conjunction Reports Assessing Threatening Encounters in Space (SOCRATES)," *Presented at the 2005 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference*, Copper Mountain, CO, January 2005, pp. 23-27.
- [2] Kelso, T. S., "Frequently Asked Questions: Two-Line Element Set Format," *Satellite Times*, Vol. 4, No. 1, Jan.1998, pp. 68-69.
- [3] Vallado, D. A., Crawford, P., Hujsak, R. and Kelso, T. S., "Revisiting Spacetrack Report #3," *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, Keystone, CO, Aug 2006.
- [4] Sidi, M. J., *Spacecraft Dynamics and Control, a Practical Engineering Approach*, Cambridge University Press, 1997.
- [5] Hoots, F. R., Paul W. S. Jr. and Robert A. G., "History of Analytical Orbit Modeling in the U. S. Space Surveillance System," *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, AIAA, Vol. 27, No. 2, 2004, pp.174-185.
- [6] Patera, R. P., "General Method for Calculating Satellite Collision Probability," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 4, July-August 2001, pp. 716-722.
- [7] Alfano, S., "Review of Conjunction Probability Methods for Short-Term Encounters", *Proceedings of the 17<sup>th</sup> AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Diego, California, 2007*.
- [8] Alfano, S., "Collision Avoidance Maneuver Planning Tool", *AAS-05-308, AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, Lake Tahoe, CA, August 2005.
- [9] Fateev, V. F. and et. al, "Analysis of Collision Prediction Characteristics," *AMOS Conference*, September 2009.

## پیوست ۱

مجموعه‌المان‌های دو سطری (TLE) می‌توانند برای پیش‌بینی موقعیت اشیای فضایی، می‌توانند برای ورودی مدل SGP4 مورد استفاده قرار گیرند. در این پیوست، معادلات حاکم بر این مدل انتشار بررسی می‌شود.

### مقداردهی اولیه برای تأثیرات سکولار درگ اتمسفری

پارامترهای  $s$  و  $q_0$  در تابع Power-Law Density به ارتفاع مداری بستگی دارد و با تغییرات ارتفاع حسیض تغییر می‌کنند.



شکل ۱۱- حداکثر احتمال برای بهترین فاصلهٔ تقرب پیش‌بینی شده (۱/۶۲۳۸ کیلومتر)

و  $AR = 1$

## نتیجه‌گیری

از آنجاکه در فضای بیکران واقعی، حرکت ماهواره‌ها و مدارهای فضایی متناسب با ارتفاع و مکان استقرارشان تحت تأثیر اغتشاشات زیادی قرار می‌گیرد، برای شبیه‌سازی هر چه صحیح‌تر و در عین حال واقعی‌تر حرکت ماهواره‌های عملیاتی و غیرعملیاتی و از همه مهم‌تر پس‌ماندهای فضایی سرگردان باید اثر همهٔ اغتشاشات وارد بر شیء فضایی در مدل‌سازی لحاظ شود. در این مقاله نشان داده شد که با مدل‌سازی دقیق و کامل‌تر، هم می‌توان مکان دقیق هر شیء در فضا و در هر زمان را دانست و هم احتمال بروز و وقوع خطرات برخورد و حوادث دیگر را پیش‌بینی و در صورت لزوم جلوگیری شود. همچنین در این مقاله با استفاده از سه مدل مختلف انتشار، دقت هر کدام در پیش‌بینی وقوع حادثه برخورد نشان داده شد و مشاهده شد که پیش‌بینی خطر تصادم امکان‌پذیر بوده است. در نهایت با استفاده از فاصلهٔ تقرب‌های بحرانی پیش‌بینی شده و تئوری احتمالات، حداکثر احتمال برخورد اشیای فضایی محاسبه شد. در صورت عدم دسترسی به داده‌های کواریانس مکانی مربوط به هر شیء، می‌توان با استفاده از پارامترهای مورد نیاز و نتایج حاصل از مدل انتشار، حداکثر احتمال برخورد دو شیء را محاسبه کرد که این مسئله برای دو ماهوارهٔ کاسموس ۲۲۵۱ و ایریدیوم ۳۳ یک مثال واقعی انجام شد. بر اساس شبیه‌سازی‌ها، یک عدم قطعیت بزرگ، احتمال برخورد کمی را نتیجه می‌دهد که ممکن است کاربر را در درک صحیح خطر یک رویارویی دچار اشتباه کند، که در این مواقع داده‌های بهتر باید برای دوباره تخمین‌زدن احتمال برخورد، مورد استفاده قرار گیرند. همچنین هرچه فاصلهٔ تقرب دو ماهواره کمتر باشد و AR بزرگ‌تر، احتمال برخورد بیشتر خواهد بود. سرانجام، با محاسبهٔ حداکثر احتمال یک برخورد، تصمیم مناسب و به موقع

$$\Delta u = -\frac{k_2}{4p_L^2} (7 \cos^2 i - 1) \sin 2u, \quad \Delta \Omega = -\frac{3k_2 \cos i}{2p_L^2} \sin 2u$$

$$\Delta i = -\frac{3k_2 \cos i}{2p_L^2} \sin i \cos 2u, \quad \Delta \dot{r} = -\frac{k_2 n}{p_L} (1 - \cos^2 i) \sin 2u$$

$$\Delta r \dot{f} = \frac{k_2 n}{p_L} \left[ (1 - \cos^2 i) \cos 2u - \frac{3}{2} (1 - 3 \cos^2 i) \right]$$

تناوب‌های پروید کوتاه برای به دست آمدن کمیت‌های لحظه‌ای اضافه می‌شوند.

$$r_k = r \left[ 1 - \frac{3}{2} k_2 \frac{\sqrt{1 - e_L^2}}{p_L^2} (3 \cos^2 i_o - 1) \right] + \Delta r$$

$$u_k = u + \Delta u, \quad \Omega_k = \Omega + \Delta \Omega, \quad i_k = i_o + \Delta i$$

$$\dot{r}_k = \dot{r} + \Delta \dot{r}, \quad r \dot{f}_k = r \dot{f} + \Delta r \dot{f}$$

بردارهای وضعیت واحد با استفاده از روابط زیر محاسبه خواهند شد:

$$U = M \sin u_k + N \cos u_k, \quad V = M \cos u_k - N \sin u_k$$

که در آن

$$N = \begin{cases} N_x = \cos \Omega_k \\ N_y = \sin \Omega_k \\ N_z = 0 \end{cases} \quad M = \begin{cases} M_x = -\sin \Omega_k \cos i_k \\ M_y = \cos \Omega_k \cos i_k \\ M_z = \sin i_k \end{cases}$$

در نهایت موقعیت و سرعت با استفاده از دو رابطه زیر داده می‌شود:

$$\vec{r} = r_k U, \quad \vec{\dot{r}} = \dot{r} U + (r \dot{f}) V$$

$$\theta = \cos i_o, \quad \xi = \frac{1}{a_o - s}$$

$$\beta_o = (1 - e_o^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = a_o e_o \xi$$

$$C_2 = (q_o - s)^4 \xi^4 n_o (1 - \eta^2)^{-\frac{7}{2}} \left[ a_o \left( 1 + \frac{3}{2} \eta^2 + 4e_o \eta + e_o \eta^3 \right) + \frac{3}{2} \frac{k_2 \xi}{(1 - \eta^2)} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \theta^2 \right) (8 + 24\eta^2 + 3\eta^4) \right]$$

$$C_1 = B^* C_2, \quad C_3 = \frac{(q_o - s)^4 \xi^5 A_{3,0} n_o R_e \sin i_o}{k_2 e_o}$$

$$C_4 = 2n_o (q_o - s)^4 \xi^4 a_o \beta_o^2 (1 - \eta^2)^{-\frac{7}{2}} \left\{ \left[ 2\eta(1 + e_o \eta) + \frac{1}{2} e_o + \frac{1}{2} \eta^3 \right] - \frac{2k_2 \xi}{a_o (1 - \eta^2)} \left[ 3(1 - 3\theta^2) \left( 1 + \frac{3}{2} \eta^2 - 2e_o \eta - \frac{1}{2} e_o \eta^3 \right) + \frac{3}{4} (1 - \theta^2) (2\eta^2 - e_o \eta - e_o \eta^3) \cos 2\omega_o \right] \right\}$$

$$C_5 = 2(q_o - s)^4 \xi^4 a_o \beta_o^2 (1 - \eta^2)^{-\frac{7}{2}} \left[ 1 + \frac{11}{4} \eta(\eta + e_o) + e_o \eta^3 \right]$$

$$D_2 = 4a_o \xi C_1^2, \quad D_3 = \frac{4}{3} a_o \xi^2 (17a_o + s) C_1^3$$

$$D_4 = \frac{2}{3} a_o^2 \xi^3 (221a_o + 31s) C_1^4$$