



Free Vibration Analysis of Grid Stiffened Doubly Curved Composite Shells using a Refined Higher Order Theory

Reza Kohandani¹, Ali Davar², Mohsen Heydari Beni³, Jafar Eskandri Jam⁴, and Majid Eskandari Shahraki⁵

1. M.Sc. Student, Department of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

*2. Assistant professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

3. PhD Student, Department of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

4. Professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

5. PhD Student, Aerospace Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

* Corresponding Author's E-mail: davar78@gmail.com

In this research the free vibration analysis of simply supported grid stiffened doubly curved shells by using a refined higher order theory is presented. The advantage of the present theory in comparison with other higher order theories is investigation of the effects of trapezoidal shape factor in the stress resultants in order to obtain more accurate frequency results. The governing equations of motion and boundary conditions are obtained using Hamilton's principle and solved by using the Galerkin method. In the case of grid stiffened shells, a distribution function is introduced for describing the physical discontinuity between the ribs and the bays. The results are validated by making comparison to those existed in the literature or those obtained using the present numerical simulation in ABAQUS/Standard solver. In most cases, validations illustrated excellent agreement between the results. Finally, the effects of geometrical properties, material property and layup on the frequency responses of the shell are discussed.

Keywords: Free vibration, Doubly curved shells, Composite, Grid stiffened structure, Higher order shell theory, Trapezoidal shape factor

**COPYRIGHTS**

© 2022 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [the Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

How to cite this article:

R. Kohandani, A. Davar, M. Heydari Beni, J. Eskandri Jam, and M. Eskandari Shahraki, "Free vibration analysis of grid stiffened doubly curved composite shells using a refined higher order theory," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 15, pp. 1-20, 2022 (in Persian).



تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مشبک کامپوزیتی دو انتخابی با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای تعمیم یافته

رضا کهندانی^۱، علی داور^{۲*}، محسن حیدری بنی^۳، جعفر اسکندری جم^۴، مجید اسکندری شهرکی^۵

۱، ۲، ۳ و ۴- مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۵- دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

* davar78@gmail.com

در این مقاله به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های مشبک کامپوزیتی دو انتخابی با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای اصلاح شده، تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداخته شده است. مزیت تئوری حاضر نسبت به دیگر تئوری‌های مرتبه بالا، احتساب اثر عبارت خسrib شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته در روابط میدان جابه‌جایی و کرنش است که سبب افزایش دقت نتایج می‌گردد. معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم بر مسئله به کمک اصل هامiltonون استخراج شده و به کمک روش گالرکین حل می‌شود. در پوسته‌های مشبک، توزیع نایپوسته سفتی و جرم پوسته در ریب‌های تقویت کننده و مواد پرکننده فضای بین ریب‌ها به کمکتابع توزیع مناسب بیان شده است. اعتبارسنجی این پژوهش، با تایج تحقیقات سایر محققین یا نتایج حل عددی به دست آمده به کمک نرم‌افزار آباکوس صورت گرفته است، در اکثر موارد، انطباق عالی بین نتایج تئوری حاضر و نتایج منابع دیگر حاصل شده است. درنهایت، مطالعه پارامتری صورت پذیرفته است که در آن اثر تغییر در پارامترهای مختلف هندسی، جنس ماده و نوع لایه‌چینی در پوسته‌های ایزوتربوپیک و کامپوزیتی موردنرسی واقع شده است.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، پوسته‌های دو انتخابی، کامپوزیت، سازه مشبک، تئوری مرتبه بالای پوسته، عبارت

شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته

علام و اختصار	
γ_0	اثر ترم ذوزنقه‌ای
k	شماره لایه چندلایه
θ	زاویه چرخش الیاف
σ	منتجه‌های تنش
$\bar{\varepsilon}$	مؤلفه‌های کرنش
K_0	ضریب تصحیح برشی
D	ماتریس سفتی
U	انرژی کرنشی
K	انرژی جنبشی
W	کار ناشی از نیروهای خارجی
L_{ij}	عملگر دیفرانسیلی
$Q_{ij}(x, y)$	سفتی کل
Q_{ij}^{rib}	سفتی ریب‌ها
Q_{ij}^{bay}	سفتی مواد پرکننده
$HP(x, y)$	تابع توزیع
شعاع‌های متوسط پوسته دو انتخابی	
ضخامت پوسته	
طول و عرض پوسته	
متغیرهای جابه‌جایی‌های درون صفحه	
متغیر جابه‌جایی خارج از صفحه	
چرخش‌های خط عمود بر سطح میانی	
تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی	
تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی	

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد

۲. استادیار (نویسنده مخاطب)

۳. دانشجوی دکتری

۴. استاد

۵. دانشجوی دکتری



عمومی‌تر دارند که با استفاده از نتایج تحلیل آن‌ها و بهره‌گیری از فرمولاسیون استخراج شده، می‌توان به تحلیل هندسه‌های تک احناکی نیز پرداخت.

امیدواران^۶ در سال‌های ۱۹۷۱ و ۱۹۷۳ روش حلی را برای تعیین فرکانس‌های پایای ارتعاشات یک ورق با تقویت‌کننده مشبک و تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده را ارائه داده است. او خواص مشبک را در جهت‌های عمود بر هم متفاوت در نظر گرفت و از رویکرد ماکرومکانیک برای رسیدن به نتیجه بفرموده است [۲، ۱]. خاره^۷ و همکاران، در سال ۲۰۰۵، با استفاده از دو تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی، به تحلیل ترمومکانیکی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های ضخیم دو احناکی ساندوبیچ با لایه‌چینی متقاطع، تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده پرداخته‌اند. یکی از این تئوری‌ها هم اثر تشن‌ها و کرنش‌های برشی عرضی و هم اثر تشن‌ها و کرنش‌های عمودی را در نظر می‌گرفت، در حالی که تئوری دیگر تنها اثر تغییر شکل برشی عرض را محاسبه می‌کرد. نتایج تحلیل، با حل‌های دقیق الاستیسیته سه‌بعدی و حل‌های فرم بسته ارائه شده در مقاله، مقایسه شده و حاکی از نزدیک بودن نتایج حاصله به پاسخ‌های دقیق بوده است [۳]. در سال ۲۰۰۶، تورانی و لاکیس^۸ به بررسی نیمه‌تحلیلی پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه و نامتران پرداختند. در این تحقیق، اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی لحظه گردیده است. روش مورد استفاده، ترکیبی از روش اجزای محدود هیبریدی و تئوری پوسته همراه با کرنش‌های برشی عرضی است. نتایج حاصله با دیگر نتایج موجود تطبیق خوبی داشت [۴].

کاندو و هان^۹ در سال ۲۰۰۹ به بررسی مشخصه‌های ارتعاشی پیش‌کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های دو احناکی کامپوزیتی پرداخته‌اند. به سبب تغییر در شرایط محیطی، تشن‌های حرارتی- رطوبتی پس‌ماند، ممکن است باعث ایجاد کمانش و ناپایداری دینامیکی در این سازه‌ها شوند. در این تحلیل از روش اجزای محدود استفاده شده است و نتایج عددی مثال‌های غیرخطی و فرکانس‌های اصلی همراه با شکل خمش‌ها و شکل مودها ارائه و بحث شده است. نتایج آنها نشان داد که با کاهاش ضخامت، نقطه اوج کمانش کاهاش می‌یابد، فرکانس اصلی در پیش‌کمانش کاهاش و در پس‌کمانش افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش شعاع احناکی فرکانس اصلی کاهاش می‌یابد. در اثر بارگذاری حرارتی، پدیده تغییر جهت در احناکه برای پانل‌های استوانه‌ای مشاهده می‌گردد. رفتار خمشی غیرخطی هندسی، مشخصه‌های ارتعاشی را در محیط‌های حرارتی- رطوبتی تحت تأثیر قرار می‌دهد [۵].

Q_{ij}^{ϕ}	سفتی ریب‌های در جهت ϕ
HP^{ϕ}	تابع توزیع ریب‌های در جهت ϕ
E	مدول یانگ
G	مدول برشی
v	ضریب پواسون
RHOST12, HOST12	تئوری ارائه شده در پژوهش حاضر
PSDT	تئوری مرجع [۱۹]
u(x,y,z,t)	مؤلفه جابه‌جاوی در جهت X
v(x,y,z,t)	مؤلفه جابه‌جاوی در جهت Y
w(x,y,z,t)	مؤلفه جابه‌جاوی در جهت Z
m_x, n_y	تعداد خانه‌های مشبک

مقدمه

با پیشرفت علم مواد و فناوری تولید، مواد کامپوزیتی به سرعت توسعه یافته‌ند و به سبب ویژگی‌های بدیع خود نظری استحکام و سفتی ویژه، ضد خوردگی و دارا بودن قابلیت طراحی و غیره در بسیاری موارد می‌تواند جایگزین مناسبی برای مواد مرسوم نظری فولاد و بتون باشد. در بین این مواد، سازه‌های کامپوزیتی با تقویت‌کننده‌های مشبک به جهت کارایی بالای سازه‌های و هزینه پایین، مورد مطالعه بسیاری از پژوهشگران واقع شدند و از قرن نوزدهم میلادی به بعد، استفاده از سازه‌های مشبک باهدف افزایش استحکام در مهندسی گسترش یافت. از جمله کاربردهای این سازه‌ها استفاده در هواپیماه، پوسته کشته‌ها، خودروها، سکوهای نفتشی، پل‌ها، ادوات نظامی و غیره است.

مطالعه پیرامون رفتار استاتیکی، دینامیکی و پایداری سازه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های مختلف با توجه به موارد کاربرد وسیع آنها، از اهمیت بالایی برخوردار است. بهویژه تحلیل ارتعاشی این‌گونه سازه‌ها بهمنظور جلوگیری از تخریب ناشی از پدیده تشید و همچنین شناسایی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مختلف در سازه ضروری به نظر می‌رسد. در همین راستا بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌ها توسط بسیاری از پژوهشگران موردن توجه قرار گرفته است و بدین منظور از روش‌های تحلیلی، عددی و تجربی متعددی بهره گرفته شده است. در بین روش‌های تحلیلی، تئوری‌های کامپوزیتی بالا برای تحلیل پوسته‌های ضخیم و از جمله پوسته‌های کامپوزیتی مورد استفاده بوده و نتایج دقیق‌تری نسبت به دیگر تئوری‌ها در این نوع سازه‌ها به دست آمده است. در انواع مشبک پوسته‌های کامپوزیتی پیشرفت، به سبب ماهیت هندسی آن‌ها، پیچیدگی تحلیل بیشتر از پوسته‌های کامپوزیتی معمولی است. همچنین پوسته‌های دو احناکی در مقایسه با پوسته‌های تک احناک مانند استوانه، حالتی

6. Ond'Varan

7. Khare

8. Toorani & Lakis

9. Kundu & Han

چندلایه با دو منحنی با نتایج موجود در مقالات و شبیه‌سازی در نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شد [۲۱].

هدف از این مقاله، به کارگیری مدلی تعمیم‌یافته برای سازه‌های مشبک مختلف متقاضان، بدون استفاده از یک مدل معادل است. در تحلیل تئوری، یکتابع توزیع^{۱۴} تعریف می‌شود که تمام حالات فیزیکی پوسته مشبک را به طور دقیق توصیف می‌کند. سپس با در نظرگیری مفروضات اصلی تئوری کلاسیک صفحات^{۱۵} و معادلات پوسته‌ها، معادلات اصلی پوسته مشبک به دست می‌آید.

حل مسئله ارتعاشات پوسته‌های دو انجنایی کامپوزیتی و مشبک

برخی از محققان با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی به تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی پرداخته‌اند؛ اما استفاده از تئوری فوق برای پوسته ارتوتروپویک حجم محاسبات زیادی داشته و تحلیل مسئله بسیار پیچیده می‌شود. به همین دلیل تاکنون اکثر محققان با بهره‌گیری از تئوری‌های مرتبه بالای دو بعدی، پوسته‌ها را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند.

کتو در سال ۱۹۹۹ نشان داد که میدان جابه‌جایی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، با در نظر گرفتن ترم ذوزنقه‌ای و محاسبه منتجه‌های تنش با انتگرال‌گیری به روش دقیق، حتی در مورد پوسته‌های ضخیم، دقت بسیار خوبی در تحلیل دینامیکی دارد. او همچنین نشان داد که این تئوری مرتبه اول در مقایسه با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای دیگر از آن استفاده شود. معادلات حاکم و شرایط مرزی فرمولاسیون تعمیم‌یافته با استفاده از اصل کار مجازی بدست آمده است و برای حل از روش ناویر استفاده شده است. نتایج حاصل از این تئوری با نتایج تئوری سه‌بعدی الاستیسیته مقایسه شده است و دقت بیشتری را نسبت به دیگر تئوری‌های از این دست، نشان داده است [۸].

در شکل (۱)، گستردۀ المان مقطع پوسته نشان داده شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن ضریب شکل ذوزنقه‌ای، شکل مستطیل گستردۀ به صورت ذوزنقه در نظر گرفته می‌شود که به واقعیت نزدیک‌تر بوده و به همین دلیل دقت پاسخ‌ها را بالا می‌برد.



شکل ۱- المان مقطع پوسته گستردۀ شده و در نظر گرفتن شکل واقعی ذوزنقه به جای شکل مستطیل

چرخی و همات در ۲۰۱۰، ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های کم‌عمق با شکل قالب بیضوی و با دو انحنای که از مواد با خواص تدریجی هدفمند ساخته شده باشند را با نسخه پیاپی ۵۰ از روش اجزاء محدود و معطوف به روش ترکیبی موردنیاز قرار داده‌اند. در محاسبات آن‌ها اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی چرخشی و غیرخطی‌های هندسی به کار رفته است. برای استخراج معادلات حرکت آزاد، از روش تعادل هارمونیک بهره گرفته شده است. معادلات برآیند غیرخطی، با تکرار و از روش حالت خطی به دست آمده و مطالعه بر همگرایی جواب و مناسب‌بودن آن انجام گرفته است. در ضمن اثر نمایی کسر حجمی و نسبت ضخامت بر فرکانس‌های خطی و غیرخطی، مورد بحث واقع شده و نشان از تأثیر این پارامترها بر رفتار سخت‌شدن دارد [۶].

صیاد در سال ۲۰۱۰ به تحلیل اثر برش بین لایه‌ای شبكه بر روی کمانش موضعی استوانه مشبک کامپوزیت پلیمری تحت بار محوری فشاری یکنواخت پرداخت [۷].

مانتاری و سوارس^{۱۶} در سال ۲۰۱۲، یک تئوری تعمیم‌یافته پنج درجه آزادی مرتبه بالای تغییر شکل برشی را به منظور تحلیل مطالعه ارتعاشات آزاد و خمش پوسته‌ها و ورق‌ها ارائه کردند که ممکن است برای ایجاد تئوری‌های مرتبه بالای دیگر از آن استفاده شود. معادلات حاکم و شرایط مرزی فرمولاسیون تعمیم‌یافته با استفاده از اصل کار مجازی بدست آمده است و برای حل از روش ناویر استفاده شده است. نتایج حاصل از این تئوری با نتایج تئوری سه‌بعدی الاستیسیته مقایسه شده است و دقت بیشتری را نسبت به دیگر تئوری‌های از این دست، نشان داده است [۸].

عدالت^{۱۷} و همکاران در سال ۲۰۱۳ به تحلیل ارتعاشات آزاد و پاسخ‌های دینامیکی پوسته تقویت‌شده با انجنایهای سهمی‌گون پرداختند. آن‌ها برای این کار از روش انرژی برای تعیین پارامترهای ارتوتروپویک معادل پوسته استفاده کردند [۹].

در سال ۲۰۲۰ زارعی و همکارانش خصوصیات ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیت تقویت شده با گردید را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین تأثیر پارامترهای هندسی پوسته و تغییرات زاویه ریب‌های متقطع بر فرکانس‌های طبیعی مورد بحث و بررسی قرار گرفت [۲۰].

در سال ۲۰۲۱ لیو و همکارانش یک روش اجزا محدود جدید بر اساس نظریه میندلین برای پوسته‌های کامپوزیت چند لایه با دو منحنی ارائه کردند و نتایج عددی خمش خطی استاتیکی، ارتعاش پویا و خمش غیرخطی صفحه تخت، پوسته استوانه‌ای و پوسته

10. Chorfi & Houmat

11. P version

12. Mantari& Soares

13. Edalata

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}, u_0^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=0}, \theta_x^* = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \\ \theta_y &= \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0}, v_0^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=0}, \theta_y^* = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \\ \theta_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0}, w_0^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{z=0}, \theta_z^* = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \Big|_{z=0}\end{aligned}\quad (2)$$

در رابطه کلی زیر با توجه به تغییرات ضرایب موجود تئوری‌های مختلفی حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}u &= (1 + \frac{\gamma_0 z}{r_x}) u_0 + z \theta_x + C_3 z^2 u_0^* + C_4 z^3 \theta_x^* \\ v &= (1 + \frac{\gamma_0 z}{r_y}) v_0 + z \theta_y + C_3 z^2 v_0^* + C_4 z^3 \theta_y^* \\ w &= w_0 + C_1 z \theta_z + C_1 z^2 w_0^* + C_2 z^3 \theta_z^*\end{aligned}\quad (3)$$

در رابطه (۳) هر یک از ضرایب بسته به نوع تئوری می‌تواند مقدار صفر و یک را به خود بگیرند. شرایط مختلف این ضرایب و تئوری حاصل از آن‌ها در جدول (۱) آمده است:

جدول ۱- اثر تغییر ضرایب مختلف در ایجاد برخی تئوری‌های پوسته

نام تئوری	ضرایب تعیین‌کننده نوع تئوری				
	C_1	C_2	C_3	C_4	γ_0
FSDT
RFSDT	۱
HOST8	۱	۱	۰	.	.
RHOST8	۱	۱	۰	.	۱
HOST10	۱	۱	۰	۱	۰
RHOST10	۱	۱	۰	۱	۱
HOST12	۱	۱	۱	۱	.
RHOST12	۱	۱	۱	۱	۱

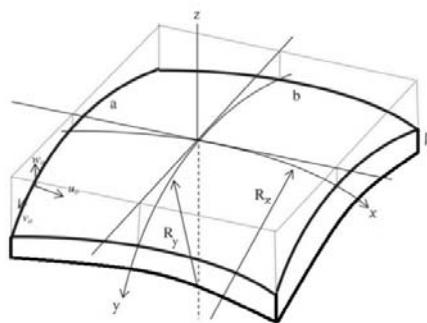
در جدول (۱) منظور از FSDT و HOST به ترتیب تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی است در صورتی که $\gamma_0 = 1$ باشد و یا به عبارتی اثر ترم ذوزنقه‌ای در محاسبات لحاظ شده باشد، حرف R (Refined) به ابتدای نام تئوری اضافه می‌شود. همچنین شماره‌های نوشته شده در جلوی نام تئوری‌های مرتبه بالا، متمایز‌کننده نوع آن تئوری از دیگر تئوری‌ها است.

در پوسته‌های ضخیم ضریب γ_0 در تئوری ارائه شده برابر با یک در نظر گرفته می‌شود، با این عمل اثر شکل ذوزنقه‌ای مقطع پوسته لحاظ شده و تئوری اصلاح شده حاصل می‌شود. در پوسته‌های نازک می‌توان از این اثر صرف نظر کرد.

در این بخش از پژوهش، با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای تعمیم‌یافته که در آن اثر ترم ذوزنقه‌ای ($1 + z/R$) در نظر گرفته شده است، بر پایه اصل هامیلتون به استخراج معادلات حاکم و سپس به کمک روش گالرکین به حل آن پرداخته شده است. در مورد پوسته‌های مشبک نیز با استفاده از یک تابع پله‌ای به منظور بیان چگونگی وضعیت فیزیکی سازه، پس از استخراج معادلات و حل آن، ماتریس جرم و سفتی تعیین شده‌اند.

تعیین مؤلفه‌های جابه‌جایی

شکل (۲) یک پوسته دو انتخابی را با شعاع‌های متوسط R_x و R_y ، ضخامت h و ابعاد $a \times b$ را به همراه مختصات مرجع در دستگاه مختصات دو انتخابی (x,y,z) نشان می‌دهد.



شکل ۲- پوسته دو انتخابی (برگرفته از [۱۰])

در این بخش بسط سری تیلور برای توسعه یک فرمولاسیون دو بعدی از یک مسئله الاستیسیته سه بعدی مورد استفاده واقع شده است. روابط زیر با بسط مؤلفه‌های جابه‌جایی $(u, v, w)(x, y, z, t)$ و $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)(x, y, z, t)$ به ترتیب در سه جهت x, y و z در هر نقطه از فضای چندلایه بر حسب مختصه ضخامت (z) به دست آمده‌اند [۱۱، ۱۲].

$$\begin{aligned}x, y, z, t &= (1 + \gamma_0 z/r_x) u_0(x, y, t) + \\ &z \theta_x(x, y, t) + z^2 u_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_x^*(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= (1 + \gamma_0 z/r_y) v_0(x, y, t) + \\ &z \theta_y(x, y, t) + z^2 v_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_y^*(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z \theta_z(x, y, t) + \\ &z^2 w_0^*(x, y, t) + z^3 \theta_z^*(x, y, t)\end{aligned}\quad (1)$$

و u_0 و v_0 متغیرها و جابه‌جایی‌های درون صفحه w_0 و جابه‌جایی خارج از صفحه یک نقطه دلخواه (x,y) بر روی سطح میانی چندلایه است و توابع θ_x و θ_y نمایانگر چرخش‌های خط عمود بر سطح میانی حول محورهای x و y است بقیه متغیرها عبارت‌های مرتبه بالا در بسط تیلور بوده و نماینده مودهای تغییر شکل عرضی مقطع پوسته هستند و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

رضا کهندانی، علی داور، محسن حیدری بنی، جعفر اسکندری چم و مجید اسکندری شهرکی

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \gamma_0 \frac{v_0}{r_y^2} - \frac{\theta_y}{r_y}, \varphi_{y0}^* &= C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial y} - \\ C_3 \frac{v_0^*}{r_y}, \chi_{yz0}^* &= C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial y} - C_4 \frac{\theta_y^*}{r_y} \varphi_{y1} = \gamma_0 \frac{v_0}{r_y} + \\ \theta_y, \chi_{yz1} &= 2C_3 v_0^*, \varphi_{y1}^* = 3C_4 \theta_y^* \end{aligned}$$

تعريف روابط کرنش جابه‌جایی

با استفاده از تئوری الاستیسیته، روابط مربوط به کرنش پوسته‌های دو انتخابی در دستگاه مختصات منحنی‌خط به صورت زیر است

[۱۳، ۱۴]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_x^2}} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{r_x} \right) \varepsilon_y = \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_y^2}} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{r_y} \right) \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_y^2}} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{r_y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \varepsilon_z = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \gamma_{xz} &= \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_x^2}} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{r_x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (۴)$$

با جایگذاری جملات مربوط به جابه‌جایی‌ها از رابطه (۱) در روابط (۴) و دسته‌بندی مجدد آن‌ها می‌توان به روابط زیر دست یافته:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \varepsilon_x = \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_x^2}} \right) (\varepsilon_{x0} + z\chi_x + z^2\varepsilon_{x0}^* + z^3\chi_x^*) \\ &\quad \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_y^2}} \right) (\varepsilon_{y0} + z\chi_y + z^2\varepsilon_{y0}^* + z^3\chi_y^*) \varepsilon_z = \\ &\quad (\varepsilon_{z0} + z\chi_z + z^2\varepsilon_{z0}^*) \gamma_{xy} = \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_x^2}} \right) (\varepsilon_{xy0} + \\ &\quad z\chi_{xy} + z^2\varepsilon_{xy0}^* + z^3\chi_{xy}^*) + \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_y^2}} \right) (\varepsilon_{yx0} + \\ &\quad z\chi_{yx} + z^2\varepsilon_{yx0}^* + z^3\chi_{yx}^*) \gamma_{xz} = \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_x^2}} \right) (\varphi_{x0} + \\ &\quad z\chi_{xz0} + z^2\varphi_{x0}^* + z^3\chi_{xz0}^*) + (\varphi_{x1} + z\chi_{xz1} + \\ &\quad z^2\varphi_{x1}^*) + (\varphi_{y1} + z\chi_{yz1} + z^2\varphi_{y1}^*) \gamma_{yz} = \\ &\quad \left(\frac{1}{1+\frac{v_0^2}{r_y^2}} \right) (\varphi_{y0} + z\chi_{yz0} + z^2\varphi_{y0}^* + z^3\chi_{yz0}^*) \end{aligned} \quad (۵)$$

در روابط (۵) جملات به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{r_x}, \chi_x = \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \\ \varepsilon_{x0}^* &= C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + C_1 \frac{w_0^*}{r_x}, \chi_x^* = C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + C_1 \frac{\theta_z}{r_x}, \\ C_2 \frac{\theta_z^*}{r_x} \varepsilon_{y0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{r_y}, \chi_y = \gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + C_1 \frac{\theta_z}{r_y}, \varepsilon_{y0}^* &= C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial y} + C_1 \frac{w_0^*}{r_y}, \chi_y^* = \\ C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} + C_2 \frac{\theta_z^*}{r_y} \varepsilon_{z0} &= C_1 \theta_z, \chi_z = \\ 2C_1 W_0^*, \varepsilon_{z0}^* &= 3C_2 \theta_z^*, \varepsilon_{xy0} = \frac{\partial v_0}{\partial x}, \chi_{xy} = \\ \gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \varepsilon_{xy0}^* &= C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial x}, \chi_{xy}^* = \\ C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x} \varepsilon_{yx0} &= \frac{\partial u_0}{\partial y}, \chi_{yx} = \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \\ \varepsilon_{yx0}^* &= C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial y}, \chi_{yx}^* = C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} \varphi_{x0} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \\ \frac{u_0}{r_x}, \chi_{xz0} &= C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - \frac{\theta_x}{r_x}, \varphi_{x0}^* = \\ C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} - C_3 \frac{u_0^*}{r_x}, \chi_{xz0}^* &= C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} - \\ C_4 \frac{\theta_x^*}{r_x}, \varphi_{x1} &= \gamma_0 \frac{u_0}{r_x} + \theta_x, \chi_{xz1} = 2C_3 u_0^*, \\ \varphi_{x1}^* &= 3C_4 \theta_x^*, \varphi_{y0} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{v_0}{r_y}, \chi_{yz0} = \end{aligned} \quad (۶)$$

روابط تنش-کرنش و متجه‌های تنش
روابط تنش-کرنش سه‌بعدی برای لایه k ام از یک چندلایه ارتوتروپیک در دستگاه مختصات منحنی‌خط و منطبق بر محورهای اصلی ماده به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{Bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (۷)$$

که در رابطه بالا درایه‌های ماتریس سفتی به صورت زیر است [۱۲]:

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{11} = \frac{E_{11}(1-\nu_{23}\nu_{32})}{\nu^*}, C_{12} = \frac{E_{11}(\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23})}{\nu^*}, \\ E_{11}(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}), C_{22} &= \frac{E_{22}(1-\nu_{13}\nu_{31})}{\nu^*}, C_{23} = \\ \frac{E_{22}(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})}{\nu^*}, C_{33} &= \frac{E_{33}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{\nu^*} C_{44} = \\ G_{12}, C_{55} &= G_{13}, C_{66} = G_{23} \nu^* = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \\ \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}) \end{aligned} \quad (۸)$$

در روابط (۸) مدول‌های یانگ، مدول‌های برشی و ضرایب بواسون به صورت زیر به هم مرتبط هستند:

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{12}}{E_{11}} &= \frac{\nu_{21}}{E_{22}}, \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}, \frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \\ G_{12} &= \frac{E_{11}}{2(1+\nu_{21})}, G_{13} = \frac{E_{11}}{2(1+\nu_{31})}, \\ G_{23} &= \frac{E_{22}}{2(1+\nu_{32})} \end{aligned} \quad (۹)$$

در صورتی که محورهای مختصات اصلی و محورهای اصلی ماده بر هم منطبق نباشند، تنش‌ها و کرنش‌ها به صورت زیر باهم رابطه دارند [۱۲]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (۱۰)$$

که در آن‌ها ثوابت الاستیک ماده ارتوتروپیک مربوطه به لایه k به صورت زیر تعریف شده‌اند [۱۲]:

$$\varphi_{x1}^* = 3C_4 \theta_x^*, \varphi_{y0} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{v_0}{r_y}, \chi_{yz0} =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} N_x & N_x^* & M_x & M_x^* \\ N_y & N_y^* & M_y & M_y^* \\ N_z & N_z^* & M_z & - \\ N_{xy} & N_{xy}^* & M_{xy} & M_{xy}^* \\ N_{yx} & N_{yx}^* & M_{yx} & M_{yx}^* \\ Q_x & Q_x^* & S_x & S_x^* \\ R_x & R_x^* & T_x & - \\ Q_y & Q_y^* & S_y & S_y^* \\ R_y & R_y^* & T_y & - \end{bmatrix} = \\ & \sum_{k=1}^{N_t} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} A_1 Q_{11} & A_1 Q_{12} & A_1 Q_{13} & A_1 Q_{14} & A_1 Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 Q_{12} & A_1 Q_{22} & A_1 Q_{23} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 Q_{13} & A_1 Q_{23} & A_1 Q_{23} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 Q_{14} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 Q_{14} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & A_1 Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 Q_{35} & A_1 Q_{35} & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 Q_{35} & A_1 Q_{35} & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} & A_1 Q_{36} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{A_1}\right)(\varepsilon_{x_0} + z\chi_x + z^2\varepsilon_{x_0}^* + z^3\chi_x^*) \\ \left(\frac{1}{A_2}\right)(\varepsilon_{y_0} + z\chi_y + z^2\varepsilon_{y_0}^* + z^3\chi_y^*) \\ (\varepsilon_{z_0} + z\chi_z + z^2\varepsilon_{z_0}^*) \\ \left(\frac{1}{A_1}\right)(\varepsilon_{xy_0} + z\chi_{xy} + z^2\varepsilon_{xy_0}^* + z^3\chi_{xy}^*) \\ \left(\frac{1}{A_2}\right)(\varepsilon_{yx_0} + z\chi_{yx} + z^2\varepsilon_{yx_0}^* + z^3\chi_{yx}^*) \\ \left(\frac{1}{A_1}\right)(\varphi_{x0} + z\chi_{xz0} + z^2\varphi_{x0}^* + z^3\chi_{xz0}) \\ (\varphi_{x1} + z\chi_{xz1} + z^2\varphi_{x1}^*) \\ \left(\frac{1}{A_2}\right)(\varphi_{y0} + z\chi_{yz0} + z^2\varphi_{y0}^* + z^3\chi_{yz0}) \\ (\varphi_{y1} + z\chi_{yz1} + z^2\varphi_{y1}^*) \end{Bmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

(۱۴)

به عنوان مثال برای N_x داریم:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{A_2}{A_1} Q_{11} \varepsilon_{x_0} + Q_{12} \varepsilon_{y_0} + \frac{A_2}{A_1} Q_{14} \varepsilon_{xy_0} + \\ &Q_{14} \varepsilon_{yx_0} + \frac{A_2}{A_1} Q_{11} z^2 \varepsilon_{x_0}^* + Q_{12} z^2 \varepsilon_{y_0}^* + \\ &\frac{A_2}{A_1} Q_{14} z^2 \varepsilon_{xy_0}^* + Q_{14} z^2 \varepsilon_{yx_0}^* + A_2 Q_{13} \varepsilon_{z_0} + \\ &A_2 Q_{13} z^2 \varepsilon_{z_0}^* + \frac{A_2}{A_1} Q_{11} z \chi_x + Q_{12} z \chi_y + \\ &\frac{A_2}{A_1} Q_{14} z \chi_{xy} + Q_{14} z \chi_{yx} + \frac{A_2}{A_1} Q_{11} z^3 \chi_x^* + \\ &Q_{12} z^3 \chi_y^* + \frac{A_2}{A_1} Q_{14} z^3 \chi_{xy}^* + Q_{14} z^3 \chi_{yx}^* + \\ &A_2 Q_{13} z \chi_z \quad (15) \end{aligned}$$

بدین ترتیب رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{\sigma} = D\bar{\varepsilon} \quad (1)$$

که در آن به ترتیب $\bar{\sigma}$ و $\bar{\varepsilon}$ منتجه‌های تنش و مؤلفه‌های کرنش هستند و به صورت زیر معروفی می‌شوند:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, \\ N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*, N_{yx}^*, \\ N_z, N_z^*, M_x, M_y, \\ M_{xy}, M_{yx}, M_x^*, M_y^*, \\ M_{xy}^*, M_{yx}^*, M_z, Q_x, \\ R_x, Q_y, R_y, Q_x^*, \\ R_x^*, Q_y^*, R_y^*, S_x, \\ T_x, S_y, T_y, S_x^*, S_y^* \end{pmatrix}^T \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} c^4 + 2(C_{12} + 2C_{44}) s^2 c^2 + C_{22} s^4 \\ Q_{12} &= C_{12} (c^4 + s^4) + (C_{11} + C_{22} - 2C_{44}) s^2 c^2 \\ Q_{13} &= C_1 (C_{13} c^2 + C_{23} s^2) \\ Q_{14} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) s c^3 + \\ &(C_{12} - C_{22} + 2C_{44}) s c^3 \\ Q_{22} &= C_{11} s^4 + 2(C_{12} + 2C_{44}) s^2 c^2 + C_{22} c^4 \\ Q_{23} &= C_1 (C_{13} s^2 + C_{23} c^2) \\ Q_{24} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) s^3 c + \\ &(C_{12} - C_{22} + 2C_{44}) c^3 s \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q_{33} &= C_1 C_{33} \\ Q_{34} &= C_1 (C_{31} - C_{32}) s c \\ Q_{44} &= (C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 2C_{44}) s^2 c^2 + C_{44} (c^4 + s^4) \\ Q_{55} &= C_{55} c^2 + C_{66} s^2 \\ Q_{56} &= (C_{55} - C_{66}) s c \\ Q_{66} &= C_{55} s^2 + C_{66} c^2 \\ Q_{ij} &= Q_{ji} \quad , \quad i, j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

که در آن‌ها $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$, θ زاویه چرخش الیاف در هر لایه هستند. روابط کرنش از روابط (۵) و (۶) را در رابطه (۱۰) جایگزین کرده و در راستای ضخامت از آن‌ها انتگرال‌گیری می‌شود: (۱۲)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} N_x & N_x^* & M_x & M_x^* \\ N_y & N_y^* & M_y & M_y^* \\ N_z & N_z^* & M_z & - \\ N_{xy} & N_{xy}^* & M_{xy} & M_{xy}^* \\ N_{yx} & N_{yx}^* & M_{yx} & M_{yx}^* \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_t} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 A_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} (1, z^2, z, z^3) dz \\ & A_1 = 1 + \frac{y_0 Z}{r_x}, A_2 = 1 + \frac{y_0 Z}{r_y} \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{55} & Q_{56} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{55} & Q_{56} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{56} & Q_{66} & Q_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{56} & Q_{66} & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

رابطه (۱۳) حالت گسترده‌تر رابطه (۱۰) است. جایگذاری همه مؤلفه‌ها و انجام عملیات جبری، منجر به تشکیل رابطه بین منتجه‌های تنش و مؤلفه‌های کرنش خواهد شد که ضرایب رابطه این دو مجموعه، تحت عنوان ماتریس D بیان می‌شود.

رضا کهندانی، علی داور، محسن حیدری بنی، جعفر اسکندری چم و مجید اسکندری شهرکی

به منظور حل مسئله رابطه (۲۰) به صورت رابطه (۲۴) بازنویسی می‌شود:

$$\int_0^t [\delta U - \delta K] dt = 0 \quad (24)$$

بدین منظور عبارت مربوط به انرژی جنبشی (۲۲) در رابطه (۲۴) جایگذاری می‌شود و تغییرات تابعی انرژی جنبشی محاسبه می‌شود [۱۴]:

$$\int_0^t \delta K dt = \frac{1}{2} \int_0^t \iiint_V \rho (2\dot{u}\delta u + 2\dot{v}\delta v + 2\dot{w}\delta w) dV dt \quad (25)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء رابطه زیر حاصل می‌گردد [۱۴]:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta K dt &= - \int_0^t \left[\iiint_V \rho (\dot{u}\delta u + \dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w) dAdz \right] dt + \\ &\quad \left. \dot{w}\delta u \right|_{t=0} dAdz = \\ &= - \int_0^t \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}\delta u + \dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w) dAdz dt \end{aligned} \quad (26)$$

با توجه به تعریف اصل هامیلتون تغییرات متغیرها در زمان‌های ابتدایی و انتهایی تحلیل صفر درنظرگرفته می‌شود
بنابراین جمله دوم در رابطه (۲۶) صفر منظور می‌شود.

با جایگذاری مؤلفه‌های جابه‌جایی در رابطه بالا، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta K dt &= - \int_0^t \left[\iint_A \rho (\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) dA \right] dz dt \\ &= - \int_0^t \left[\iint_A \rho \left(\begin{array}{l} \left(\ddot{u}_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 z}{r_x} \right) + z \ddot{\theta}_x + C_3 z^2 \ddot{u}_0^* + C_4 z^3 \ddot{\theta}_x^* \right) \times \\ \left(\delta u_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 z}{r_x} \right) + z \delta \theta_x + C_3 z^2 \delta u_0^* + C_4 z^3 \delta \theta_x^* \right) + \\ \left(\ddot{v}_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 z}{r_y} \right) + z \ddot{\theta}_y + C_3 z^2 \ddot{v}_0^* + C_4 z^3 \ddot{\theta}_y^* \right) \times \\ \left(\delta v_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 z}{r_y} \right) + z \delta \theta_y + C_3 z^2 \delta v_0^* + C_4 z^3 \delta \theta_y^* \right) + \\ \left(\ddot{w}_0 + C_1 z \ddot{\theta}_z + C_1 z^2 \ddot{w}_0^* + C_2 z^3 \ddot{\theta}_z^* \right) \times \\ \left(\delta w_0 + C_1 z \delta \theta_z + C_1 z^2 \delta w_0^* + C_2 z^3 \delta \theta_z^* \right) \end{array} \right) dA dz dt \end{aligned} \quad (27)$$

در این مرحله تغییرات تابعی انرژی کرنشی محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta U dt &= \\ &\quad \int_0^t \int_0^a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \right. \\ &\quad \left. \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] dAdz dt \end{aligned} \quad (28)$$

و با جایگذاری مؤلفه‌های کرنش از روابط (۵) و (۶) در رابطه (۲۸) رابطه زیر ایجاد می‌شود:

*تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_x :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{y_0}, \varepsilon_{xy_0}, \varepsilon_{yx_0}, \\ \varepsilon_{x_0}^*, \varepsilon_{y_0}^*, \varepsilon_{xy_0}^*, \varepsilon_{yx_0}^*, \\ \varepsilon_{z_0}, \varepsilon_{z_0}^*, \chi_x, \chi_y, \\ \chi_{xy}, \chi_{yx}, \chi_x^*, \chi_y^*, \\ \chi_{xy}^*, \chi_{yx}^*, \chi_z, \varphi_{x_0}, \\ \varphi_{x_1}, \varphi_{y_0}, \varphi_{y_1}, \varphi_{x_0}^*, \\ \varphi_{x_1}^*, \varphi_{y_0}^*, \varphi_{y_1}^*, \chi_{xz_0}, \\ \chi_{xz_1}, \chi_{yz_0}, \chi_{yz_1}, \chi_{xz_0}^*, \chi_{yz_0}^* \end{pmatrix}^T \quad (18)$$

در رابطه (۱۶)، D ماتریس سفتی است که مشکل از ماتریس‌های سفتی $D_m, D_s, D_{bc}, D_{mc}, D_b$ بوده است.

$$D = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & K_0 D_s \end{bmatrix}, D_f = \begin{bmatrix} D_m & D_{mc} \\ D_{bc} & D_b \end{bmatrix} \quad (19)$$

در روابط بالا K_0 ضریب تصحیح برشی است که در تئوری‌های مرتبه اول لحاظ می‌شود. این ضریب بر اساس تئوری میندلین برابر با ($K_0 = \frac{\pi^2}{12}$) است. بدینهی است در تئوری‌های مرتبه بالاتر این ضریب برابر یک در نظر گرفته می‌شود.

در انتگرال‌گیری که منجر به رابطه (۱۶) شد، می‌بایست از عباراتی که شامل ترم ذوزنقه‌ای هستند، انتگرال گرفته شود، در این پژوهش به منظور حصول باسخه‌ای واقعی این عمل به صورت دقیق انجام شده است.

معادلات حاکم

به منظور انجام تحلیل دینامیکی، معادلات حاکم بر پوسته دو اتحنایی با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می‌شود.

صورت تحلیلی اصل هامیلتون به صورت زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [U - K - W] dt = 0 \quad (20)$$

در عبارت بالا U انرژی کرنشی ناشی از تغییر شکل بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (21)$$

و همچنین K انرژی جنبشی است و عبارت است از [۱۴]:

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (2)$$

در رابطه (۲۰) W کار ناشی از نیروهای خارجی بوده و در مسئله حاضر به دلیل عدم وجود این گونه نیروها صفر درنظرگرفته می‌شود.

در روابط بالا المان سطح به صورت زیر تعریف شده است:

$$dA = A_1 A_2 dx dy \quad (23)$$

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yx} \delta \varepsilon_{yx}) dz dA = \\ \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial v_0}{\partial x}) + \\ z(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial x}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial w_0}{\partial x}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x}) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. \begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \\ z(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial y}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y}) \end{pmatrix} dz A_1 A_2 dy dx \right) = \\ \iint_A \left(\begin{pmatrix} N_{xy}(\delta \frac{\partial v_0}{\partial x}) + \\ M_{xy}(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial x}) + \\ N_{xy}^*(\delta C_3 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x}) + \\ M_{xy}^*(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x}) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. \begin{pmatrix} N_{yx}(\delta \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \\ M_{yx}(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial y}) + \\ N_{yx}^*(\delta C_3 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y}) + M_{yx}^*(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y}) \end{pmatrix} dy dx \right) \quad (۳۷)$$

$$- \iint_A \left(\begin{pmatrix} (\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta v_0 + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \theta_y) + \\ (C_3 \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} \delta v_0^*) + \\ (C_4 \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} \delta \theta_y^*) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. \begin{pmatrix} (\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \delta u_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \delta u_0 + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \delta \theta_x) + \\ (C_3 \frac{\partial N_{yx}^*}{\partial y} \delta u_0^*) + (C_4 \frac{\partial M_{yx}^*}{\partial y} \delta \theta_x^*) \end{pmatrix} dy dx \right)$$

*تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{xz} و ε_{xy}

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx}) dz dA = \\ \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \delta \frac{u_0}{r_x}) + \\ z(\delta C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \delta \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - \delta \frac{\theta_x}{r_x}) + \\ z^2(\delta C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} - \delta C_3 \frac{u_0}{r_x}) + \\ z^3(\delta C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} - \delta C_4 \frac{\theta_x^*}{r_x}) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. \begin{pmatrix} (\delta \gamma_0 \frac{u_0}{r_x} + \delta \theta_x) + \\ z(\delta 2C_1 u_0^*) + \\ z^2(\delta 3C_4 \theta_x^*) \end{pmatrix} dz A_1 A_2 dy dx \right) = \\ \iint_A \left(\begin{pmatrix} Q_x(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - \delta \frac{u_0}{r_x}) + \\ S_x(\delta C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \delta \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - \delta \frac{\theta_x}{r_x}) + \\ Q_x^*(\delta C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial x} - \delta C_3 \frac{u_0}{r_x}) + \\ S_x^*(\delta C_2 \frac{\partial \theta_z^*}{\partial x} - \delta C_4 \frac{\theta_x^*}{r_x}) + \\ R_x(\delta \gamma_0 \frac{u_0}{r_x} + \delta \theta_x) + \\ T_x(\delta 2C_1 u_0^*) + R_x^*(\delta 3C_4 \theta_x^*) \end{pmatrix} + \right. \\ \left. \begin{pmatrix} (\frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w_0 + \frac{\partial Q_x}{\partial r_x} \delta u_0) + \\ (C_1 \frac{\partial S_x}{\partial x} \delta \theta_z + \gamma_0 \frac{S_x}{r_x^2} \delta u_0 + \frac{S_x}{r_x} \delta \theta_x) + \\ (C_1 \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} \delta w_0^* + C_3 \frac{Q_x^*}{r_x} \delta u_0^*) + \\ (C_2 \frac{\partial S_x^*}{\partial x} \delta \theta_z^* + C_4 \frac{S_x^*}{r_x} \delta \theta_x^*) + \\ (-\gamma_0 \frac{R_x}{r_x} \delta u_0 - R_x \delta \theta_x) + \\ (-2C_3 T_x \delta u_0^*) + (-3C_4 R_x^* \delta \theta_x^*) \end{pmatrix} dy dx \right) \\ = \int - \iint_A \left(\begin{pmatrix} (\frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w_0 + \frac{\partial Q_x}{\partial r_x} \delta u_0) + \\ (C_1 \frac{\partial S_x}{\partial x} \delta \theta_z + \gamma_0 \frac{S_x}{r_x^2} \delta u_0 + \frac{S_x}{r_x} \delta \theta_x) + \\ (C_1 \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} \delta w_0^* + C_3 \frac{Q_x^*}{r_x} \delta u_0^*) + \\ (C_2 \frac{\partial S_x^*}{\partial x} \delta \theta_z^* + C_4 \frac{S_x^*}{r_x} \delta \theta_x^*) + \\ (-\gamma_0 \frac{R_x}{r_x} \delta u_0 - R_x \delta \theta_x) + \\ (-2C_3 T_x \delta u_0^*) + (-3C_4 R_x^* \delta \theta_x^*) \end{pmatrix} dy dx \right) \quad (۳۸)$$

$$\iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \delta \varepsilon_x dz dA = \\ \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{w_0}{r_x}) + \\ z(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_x}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_x}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_x}) \end{pmatrix} dz A_1 A_2 dy dx \right) = \\ \iint_A \left(\begin{pmatrix} N_x \left(\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{w_0}{r_x} \right) + \\ M_x \left(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_x} \right) + \\ N_x^* \left(\delta C_3 \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_x} \right) + \\ M_x^* \left(\delta C_4 \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_x} \right) \end{pmatrix} dy dx \right) \quad (۳۹) \\ \iint_A \left(\begin{pmatrix} (\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{N_x}{r_x} \delta w_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \theta_x - C_1 \frac{M_x}{r_x} \delta \theta_z) + \\ (C_3 \frac{\partial N_x^*}{\partial x} \delta u_0^* - C_1 \frac{N_x^*}{r_x} \delta w_0^*) + \\ (C_4 \frac{\partial M_x^*}{\partial x} \delta \theta_x^* - C_2 \frac{M_x^*}{r_x} \delta \theta_z^*) \end{pmatrix} dy dx \right)$$

* تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_y

$$\iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \delta \varepsilon_y dz dA = \\ - \iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\begin{pmatrix} (\delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{w_0}{r_y}) + \\ z(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_y}) + \\ z^2(\delta C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial y} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_y}) + \\ z^3(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_y}) \end{pmatrix} dz A_1 A_2 dy dx \right) = \\ \iint_A \left(\begin{pmatrix} N_y \left(\delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{w_0}{r_y} \right) + \\ M_y \left(\delta \gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \delta \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \delta C_1 \frac{\theta_z}{r_y} \right) + \\ N_y^* \left(\delta C_3 \frac{\partial v_0^*}{\partial y} + \delta C_1 \frac{w_0^*}{r_y} \right) + \\ M_y^* \left(\delta C_4 \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} + \delta C_2 \frac{\theta_z^*}{r_y} \right) \end{pmatrix} dy dx \right) \\ - \iint_A \left(\begin{pmatrix} (\frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 - \frac{N_y}{r_y} \delta w_0) + \\ (\gamma_0 \frac{1}{r_y} \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta v_0 + \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \theta_y - C_1 \frac{M_y}{r_y} \delta \theta_z) + \\ (C_3 \frac{\partial N_y^*}{\partial y} \delta v_0^* - C_1 \frac{N_y^*}{r_y} \delta w_0^*) + \\ (C_4 \frac{\partial M_y^*}{\partial y} \delta \theta_y^* - C_2 \frac{M_y^*}{r_y} \delta \theta_z^*) \end{pmatrix} dy dx \right) \quad (۴۰)$$

* تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_z

$$\iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \delta \varepsilon_z dz dA = \\ \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z ((\delta C_1 \theta_z) + z(\delta 2C_1 w_0^*) + \\ z^2(\delta 3C_2 \theta_z^*)) dz A_1 A_2 dy dx = \\ \iint_A N_z (\delta C_1 \theta_z) + M_z (\delta 2C_1 w_0^*) + \\ N_z^* (\delta 3C_2 \theta_z^*) dy dx = - \iint_A (-C_1 N_z \delta \theta_z) - \\ (2M_z C_1 \delta w_0^*) - (3N_z^* C_2 \delta \theta_z^*) dy dx \quad (۴۱)$$

* تغییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{xy} و ε_{yz}

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} & u_0^* &= u_{0mn}^* \cos \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} \\ v_0 &= v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{iw_{mn}t} & v_0^* &= v_{0mn}^* \sin \alpha x \cos \beta y e^{iw_{mn}t} \\ w_0 &= w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} & w_0^* &= w_{0mn}^* \sin \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} \\ \theta_x &= \theta_{xmn} \cos \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} & \theta_x^* &= \theta_{xmn}^* \cos \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} \\ \theta_y &= \theta_{ymn} \sin \alpha x \cos \beta y e^{iw_{mn}t} & \theta_y^* &= \theta_{ymn}^* \sin \alpha x \cos \beta y e^{iw_{mn}t} \\ \theta_z &= \theta_{zmn} \sin \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} & \theta_z^* &= \theta_{zmn}^* \sin \alpha x \sin \beta y e^{iw_{mn}t} \end{aligned} \quad (36)$$

و $T_{mn}(t) = e^{iw_{mn}t}$. $\beta = \frac{n\pi}{b}$ ، $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ که در روابط بالا θ_{xmn}^* ، θ_{ymn}^* ، w_{0mn}^* ، v_{0mn}^* ، u_{0mn}^* ، θ_{zmn} ، θ_{ymn} ، θ_{xmn} ، w_{0mn} ، v_{0mn} ، u_{0mn} ثابت شکل مودهای طبیعی می باشند.

پس از مرتب کردن معادلات تعادل، عملگرهای دیفرانسیلی به صورت زیر بیان می شود:

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & L_{1,4} & L_{1,5} & L_{1,6} & L_{1,7} & L_{1,8} & L_{1,9} & L_{1,10} & L_{1,11} & L_{1,12} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} & L_{2,4} & L_{2,5} & L_{2,6} & L_{2,7} & L_{2,8} & L_{2,9} & L_{2,10} & L_{2,11} & L_{2,12} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & L_{3,4} & L_{3,5} & L_{3,6} & L_{3,7} & L_{3,8} & L_{3,9} & L_{3,10} & L_{3,11} & L_{3,12} \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} & L_{4,5} & L_{4,6} & L_{4,7} & L_{4,8} & L_{4,9} & L_{4,10} & L_{4,11} & L_{4,12} \\ L_{5,1} & L_{5,2} & L_{5,3} & L_{5,4} & L_{5,5} & L_{5,6} & L_{5,7} & L_{5,8} & L_{5,9} & L_{5,10} & L_{5,11} & L_{5,12} \\ L_{6,1} & L_{6,2} & L_{6,3} & L_{6,4} & L_{6,5} & L_{6,6} & L_{6,7} & L_{6,8} & L_{6,9} & L_{6,10} & L_{6,11} & L_{6,12} \\ L_{7,1} & L_{7,2} & L_{7,3} & L_{7,4} & L_{7,5} & L_{7,6} & L_{7,7} & L_{7,8} & L_{7,9} & L_{7,10} & L_{7,11} & L_{7,12} \\ L_{8,1} & L_{8,2} & L_{8,3} & L_{8,4} & L_{8,5} & L_{8,6} & L_{8,7} & L_{8,8} & L_{8,9} & L_{8,10} & L_{8,11} & L_{8,12} \\ L_{9,1} & L_{9,2} & L_{9,3} & L_{9,4} & L_{9,5} & L_{9,6} & L_{9,7} & L_{9,8} & L_{9,9} & L_{9,10} & L_{9,11} & L_{9,12} \\ L_{10,1} & L_{10,2} & L_{10,3} & L_{10,4} & L_{10,5} & L_{10,6} & L_{10,7} & L_{10,8} & L_{10,9} & L_{10,10} & L_{10,11} & L_{10,12} \\ L_{11,1} & L_{11,2} & L_{11,3} & L_{11,4} & L_{11,5} & L_{11,6} & L_{11,7} & L_{11,8} & L_{11,9} & L_{11,10} & L_{11,11} & L_{11,12} \\ L_{12,1} & L_{12,2} & L_{12,3} & L_{12,4} & L_{12,5} & L_{12,6} & L_{12,7} & L_{12,8} & L_{12,9} & L_{12,10} & L_{12,11} & L_{12,12} \end{bmatrix} \quad (37)$$

با جایگذاری بردار شکل مودهای طبیعی L در عملگرهای دیفرانسیلی، معادلات تعادل، دستگاه معادلات زیر حاصل می شوند:

$$L_{ij}(\Delta_j) = 0 \quad (38)$$

برای حل دستگاه معادلات فوق از روش گالرکین استفاده

می شود:[۱۶، ۱۷]

$$\int_0^b \int_0^a L_{ij}(\Delta_j) T_{mn}(t) \psi_i dx dy = 0 \quad (39)$$

که در آن، L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی هستند که مؤلفه های جایه جایی در آن ها جایگذاری شده اند و ψ بردار توابع وزنی بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi = \begin{bmatrix} \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sin \alpha x \cos \beta y \\ \sin \alpha x \sin \beta y \\ \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sin \alpha x \cos \beta y \\ \sin \alpha x \sin \beta y \\ \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sin \alpha x \cos \beta y \\ \sin \alpha x \sin \beta y \\ \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sin \alpha x \cos \beta y \\ \sin \alpha x \sin \beta y \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \theta_{xmn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ \theta_{ymn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ \theta_{zmn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ u_{0mn}^* \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_{0mn}^* \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_{0mn}^* \sin \alpha x \sin \beta y \\ \theta_{xmn}^* \cos \alpha x \sin \beta y \\ \theta_{ymn}^* \sin \alpha x \cos \beta y \\ \theta_{zmn}^* \sin \alpha x \sin \beta y \end{bmatrix} \quad (40)$$

*تعییرات انرژی کرنشی متناظر با ε_{xy} و ε_{yz}

$$\begin{aligned} \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \sigma_{zy} \delta \varepsilon_{zy}) dz dA &= \\ \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \left(\begin{array}{l} (\delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \delta \frac{v_0}{r_y}) + \\ \sigma_{yz} \frac{1}{A_2} \left(z(\delta C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \delta \gamma_0 \frac{v_0}{r_y^2} - \delta \frac{\theta_y}{r_y}) + \right. \right. \\ \left. \left. z^2(\delta C_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} - \delta C_3 \frac{v_0}{r_y}) + \right. \right. \\ \left. \left. z^3(\delta C_2 \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \delta C_4 \frac{\theta_y}{r_y}) \right. \right) + \\ \sigma_{zy} \left(\begin{array}{l} (\delta \gamma_0 \frac{v_0}{r_y} + \delta \theta_y) + \\ z(\delta 2C_3 v_0^*) + \\ z^2(\delta 3C_4 \theta_y^*) \end{array} \right) \end{array} \right) dz dA A_1 A_2 dy dx = \\ \iint_A \left(\begin{array}{l} Q_y (\delta \frac{\partial w_0}{\partial y} - \delta \frac{v_0}{r_y}) + \\ S_y (\delta C_1 \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \delta \gamma_0 \frac{v_0}{r_y^2} - \delta \frac{\theta_y}{r_y}) + \\ Q_y^* (\delta C_1 \frac{\partial w_0^*}{\partial y} - \delta C_3 \frac{v_0^*}{r_y}) + \\ S_y^* (\delta C_2 \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \delta C_4 \frac{\theta_y}{r_y}) + \\ R_y (\delta \gamma_0 \frac{v_0}{r_y} + \delta \theta_y) + \\ T_y (\delta 2C_3 v_0^*) + R_y^* (\delta 3C_4 \theta_y^*) \end{array} \right) dy dx = \\ \int - \iint_A \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} \delta w_0 + \frac{Q_y}{r_y} \delta v_0 \right) + \\ (C_1 \frac{\partial S_y}{\partial y} \delta \theta_z + \gamma_0 \frac{S_y}{r_y^2} \delta v_0 + \frac{S_y}{r_y} \delta \theta_y) + \\ (C_1 \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} \delta w_0^* + C_3 \frac{Q_y^*}{r_y} \delta v_0^*) + \\ (C_2 \frac{\partial S_y^*}{\partial y} \delta \theta_z^* + C_4 \frac{S_y^*}{r_y} \delta \theta_y^*) + \\ (-\gamma_0 \frac{R_y}{r_y} \delta v_0 - R_y \delta \theta_y) + \\ (-2C_3 T_y \delta v_0^*) + (-3C_4 R_y^* \delta \theta_y^*) \end{array} \right) dy dx \end{aligned} \quad (34)$$

تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته های کامپوزیتی

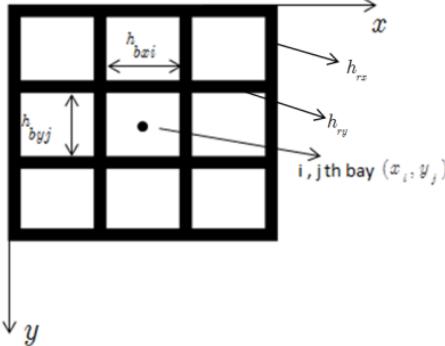
در اینجا با حل معادلات تعادل پوسته که در قسمت قبل به دست آمده است، به محاسبه فرکانس های طبیعی ارتعاشات آزاد و همچنین شکل مودهای متناظر با آن ها پرداخته می شود.

بدین منظور باید شرایط مرزی مورد نظر، توسط توابعی بر مؤلفه های جایه جایی اعمال شوند. برای این مسئله شرایط مرزی ساده به صورت زیر تعریف شده است:[۱۲]

$$\theta_y^* = \theta_z^* = v_0 = w_0 = \theta_y = \theta_z = v_0^* = w_0^* = N_x = M_x = N_x^* = M_x^* = 0 \quad (35)$$

به منظور ارضی شرایط مرزی ذکر شده در رابطه (۳۵) مؤلفه های جایه جایی پوسته به صورت حاصل ضرب توابع متناظر مختصات تمیمی بافته $T_{mn}(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می شوند [۱۵، ۱۲]:

در شکل (۳) مشخصات هندسی پوسته مشبک با ریب‌های افقی و عمودی و در شکل (۴) پوسته مشبک با ریب‌هایی با زوایای مختلف ارائه شده است.



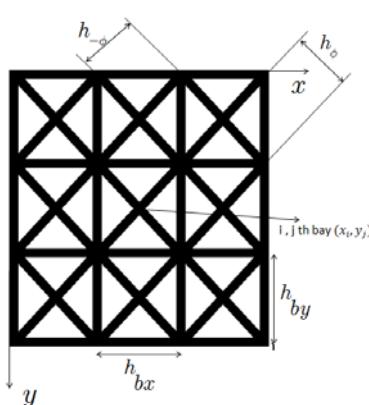
شکل ۳- مشخصات پوسته مشبک با ریب‌های افقی و عمودی

در صورتی که در سازه مشبک مورد مطالعه، ریب‌ها ارتوتروپیک باشند، ریب‌های افقی، عمودی و زاویدار موجود به همراه مواد پرکننده به صورت زیر تحلیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= Q_{ij}^0(1 - HP^0) + Q_{ij}^{90}(1 - HP^{90}) + \\ &Q_{ij}^\phi(1 - HP^\phi) + Q_{ij}^{-\phi}(1 - HP^{-\phi}) + \\ &Q_{ij}^{bay}(HP^0 \times HP^{90} \times HP^\phi \times HP^{-\phi}) \end{aligned} \quad (47)$$

سفتی ریب‌های در جهت ϕ : Q_{ij}^ϕ ،تابع توزیع ریب‌های در جهت HP^ϕ : Q_{ij}^{bay}

$$\begin{aligned} HP^0 &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[H(y - y_j + \frac{h_{byj}}{2}) - H(y - y_j - \frac{h_{byj}}{2}) \right] \\ HP^{90} &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[H(x - x_i + \frac{h_{axi}}{2}) - H(x - x_i - \frac{h_{axi}}{2}) \right] \\ HP^\phi &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[H(x - x_i + \frac{h_{\phi x}}{2}) - H(x - x_i - \frac{h_{\phi x}}{2}) \right] \times \\ &\left[H(y - y_j + \frac{h_{\phi y}}{2}) - H(y - y_j - \frac{h_{\phi y}}{2}) \right] \\ HP^{-\phi} &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[H(x - x_i + \frac{h_{-\phi x}}{2}) - H(x - x_i - \frac{h_{-\phi x}}{2}) \right] \times \\ &\left[H(v - v_j + \frac{h_{-\phi y}}{2}) - H(v - v_j - \frac{h_{-\phi y}}{2}) \right] \end{aligned} \quad (48)$$



شکل ۴- مشخصات پوسته مشبک با ریب‌های با زوایای مختلف

با انجام انتگرال رابطه (۳۸) و مرتب‌سازی آن، معادله مقدار ویژه زیر به دست می‌آید:

$$[K - \omega_{mn}^2 M]\{d\} = 0 \quad (41)$$

که در آن:

$$\{d\} = \left\{ u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}, \theta_{zmn}, u_{0mn}^*, v_{0mn}^*, w_{0mn}^*, \theta_{xmn}^*, \theta_{ymn}^*, \theta_{zmn}^* \right\}^T \quad (42)$$

با حل این معادله مقدار ویژه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای متناظر با آن به دست می‌آید. بدین صورت که کوچکترین فرکانس طبیعی پوسته برابر با ریشه دوم کوچکترین مقدار ویژه می‌باشد. برای به دست آوردن این مقادیر، ماتریس‌های K و M رابطه (۴۰) قرار می‌گیرند و به کمک برنامه‌نویسی در نرم‌افزار متلب فرکانس‌های طبیعی محاسبه می‌شود.

تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مشبک

در پوسته‌های مشبک به دلیل تفاوت بین جنس ریب‌ها و فضای خالی بین ریب‌ها، نمی‌توان توزیع سفتی را به صورت یکنواخت در نظر گرفت؛ لذا این امر توسط تابع پله‌ای هویسايد رابطه (۴۳) انجام می‌شود [۱۸].

$$Q_{ij}(x, y) = Q_{ij}^{rib}[1 - HP(x, y)] + Q_{ij}^{bay}HP(x, y) \quad (43)$$

در رابطه (۴۳)، سفتی کل: $Q_{ij}(x, y)$ ، سفتی ریب‌ها: Q_{ij}^{rib} ، سفتی مواد پرکننده: Q_{ij}^{bay} ، تابع توزیع: $HP(x, y)$ است که تابع توزیع بر روی ریب‌ها مقدار یک و بر روی نواحی پرکننده مقدار صفر را اختیار می‌کند.

$$HP(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{بین ریب‌ها} \\ 0 & \text{بروی ریب‌ها} \end{cases} \quad (44)$$

به عنوان مثال برای یک سازه مقاوم شده با خانه‌های مربعی^{۱۶} تابع توزیع موردنظر با استفاده از تابع هویسايد به صورت رابطه (۴۵) بیان می‌شود [۱۸]

$$HP(x, y) = \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{\left[H(x - x_i + \frac{h_{bxi}}{2}) - H(x - x_i - \frac{h_{bxi}}{2}) \right] \times}{\left[H(y - y_j + \frac{h_{byj}}{2}) - H(y - y_j - \frac{h_{byj}}{2}) \right]} \quad (45)$$

همچنین مشتقات آن نسبت به متغیرهای x و y به صورت رابطه (۴۶) تعریف می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial HP(x, y)}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[\delta(x - x_i + \frac{h_{bxi}}{2}) - \delta(x - x_i - \frac{h_{bxi}}{2}) \right] \times \\ &\left[H(y - y_j + \frac{h_{byj}}{2}) - H(y - y_j - \frac{h_{byj}}{2}) \right] \\ \frac{\partial HP(x, y)}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[H(x - x_i + \frac{h_{bxi}}{2}) - H(x - x_i - \frac{h_{bxi}}{2}) \right] \times \\ &\left[\delta(y - y_j + \frac{h_{byj}}{2}) - \delta(y - y_j - \frac{h_{byj}}{2}) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

^{۱۶}Orthogrid

رضا کهندانی، علی داور، محسن حیدری بنی، جعفر اسکندری چم و مجید اسکندری شهرکی

$$\begin{aligned}
 L_{11} = & D_{m1,1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{m1,4} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{mc1,1} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \\
 & D_{mc1,4} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \\
 & \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{m1,4}}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{mc1,1}}{\partial x} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{mc1,4}}{\partial x} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\
 & D_{bc1,1} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + D_{bc1,4} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{b1,1} \gamma_0 \frac{1}{r_x^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \\
 & D_{b1,4} \gamma_0 \frac{1}{r_x r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \\
 & \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{b1,1}}{\partial x} \gamma_0 \frac{1}{r_x^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{b1,4}}{\partial x} \gamma_0 \frac{1}{r_x r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\
 & D_{m4,1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + D_{m4,4} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{mc4,1} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \\
 & D_{mc4,4} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \\
 & \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{m4,4}}{\partial y} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{mc4,1}}{\partial y} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{mc4,4}}{\partial y} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\
 & D_{bc4,1} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{bc4,4} \gamma_0 \frac{1}{r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{b4,1} \gamma_0 \frac{1}{r_x r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \\
 & D_{b4,4} \gamma_0 \frac{1}{r_x r_x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \\
 & \frac{1}{r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial D_{b4,1}}{\partial y} \gamma_0 \frac{1}{r_x r_x} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial D_{b4,4}}{\partial y} \gamma_0 \frac{1}{r_x r_x} \frac{\partial u_0}{\partial y} - \\
 & D_{s1,1} \frac{u_0}{r_x^2} + D_{s1,2} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - D_{s1,9} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^3} + D_{s2,1} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} - \\
 & D_{s2,2} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^2} + D_{s2,9} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^3} - D_{s9,1} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^3} + D_{s9,2} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^3} - \\
 & D_{s9,9} \gamma_0 \frac{u_0}{r_x^4} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \left(\tilde{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{r_x} \tilde{I}_1 + \frac{\gamma_0^2}{r_x^2} \tilde{I}_2 \right)
 \end{aligned} \quad (51)$$

نتایج و بحث

پوسته دو انحنایی

بیمارادی در ۱۹۹۱، با استفاده از معادلات الاستیسیته به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های دو انhaniایی چندلایه‌ای و همگن، با زمینه مستطیلی و ساخته شده از مواد ارتوتروپیک، پرداخت. او حل این مسئله را با فرض ناچیز بودن نسبت ضخامت پوسته به ساع طفح میانی در مقایسه با واحد، به انجام رسانید. وی در محاسبه نتایج از رابطه زیر برای نرمال کردن پاسخ بهره گرفت:

$$\omega^* = \omega a \sqrt{\rho/E_{22}} \quad (52)$$

خواص ماده نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned}
 E_1/E_2 &= 25 \\
 E_2/E_3 &= 1 \\
 G_{12}/E_2 &= G_{13}/E_2 = 0.5
 \end{aligned} \quad (53)$$

در این موارد مشتقات نسبت به متغیرهای x و y به عنوان مثال برای HP^0 به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial HP^0}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{m_y} \left[\delta(y - y_j + \frac{h_{byj}}{2}) - \delta(y - y_j - \frac{h_{byj}}{2}) \right] \\
 \frac{\partial HP^0}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \quad (49)$$

که در روابط بالا x_i و y_j مختصات مرکز هر خانه، h ضخامت ریبها و $m_x \times m_y$ تعداد خانه‌ها را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
 x_i &, \quad i=1, \dots, m_x \\
 y_j &, \quad j=1, \dots, m_y
 \end{aligned} \quad (50)$$

روابط تنش-کرنش

روابط تنش-کرنش در پوسته‌های مشبک نیز مانند پوسته‌های کامپوزیتی معمولی و مطابق با روابط (۱۲) تا (۱۴) حاصل می‌شود، با این تفاوت که به جای Q_{ij} ها در آنها از روابط (۴۳) و (۴۸) به ترتیب برای پوسته مشبک به ریب‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک استفاده می‌شود تا بتوان توزیع متفاوت مواد در اجزای سازه مشبک را لاحاظ کرد؛ در واقع تفاوت در روابط مربوط به پوسته‌های مشبک نسبت به پوسته‌های کامپوزیتی در ماتریس سفتی $D(x, y)$ آنها می‌باشد. معادلات حاکم بر پوسته‌های مشبک دو انحنایی همانند پوسته‌های کامپوزیتی غیر مشبک استخراج می‌شود.

در مرحله جایگذاری منتجه‌های تنش در معادلات اویلر و استخراج عملگرهای دیفرانسیلی باید توجه داشت که در اینجا برخلاف پوسته‌های غیرمشبک عناصر ماتریس D نیز به دلیل وجود تابع هویسايد، نسبت به متغیرهای x ، y ، تغییرات دارند و در عملیات مشتق‌گیری وارد می‌شوند. بنابراین مشتقات مربوطه از روابط (۴۶) و (۴۹) در محاسبات وارد می‌شود. پس از به دست آوردن تمامی عملگرهای دیفرانسیلی به طریقه گفته شده، بقیه مراحل تا به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی، مانند پوسته‌های کامپوزیتی معمولی خواهد بود. چندین نمونه از عملگرهای دیفرانسیلی مربوط به پوسته‌های مشبک در پیوست آمده است، به عنوان مثال اولین عضو از عملگرهای دیفرانسیلی در پوسته‌های کامپوزیتی به صورت زیر بیان شد (عبارات بدون خط) که در پوسته‌های مشبک جملاتی که زیر آنها خط کشیده شده نیز به دلیل وجود مشتق در درایه‌های ماتریس D اضافه می‌شوند:

است. مشاهدات نشان می‌دهد که با افزایش نسبت h/a و افزایش نسبت a/r_x پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. در تمامی موارد تئوری مرتبه بالای حاضر از تئوری PSDT [۱۹] دارای دقت بالاتری است. همچنین در هر دو جدول مشخص است که تئوری‌های مرتبه بالا مقادیر فرکانسی بالاتری را در مقایسه با حل دقیق سه بعدی نشان می‌دهند.

از دیگر موارد قابل ملاحظه این است که در بسیاری از موارد فرکانس‌های مربوط به پوسته با لایه‌های (۰/۹۰) مقادیر کمتری نسبت به پوسته تک لایه همگن و با همان ابعاد دارند و این به دلیل آن است که در یک ضخامت معین در پوسته تک لایه، دو برابر دولایه (۰/۹۰) الیاف صفر درجه وجود دارد و به جهت تأثیر مستقیم آن‌ها در سفتی و درنتیجه فرکانس طبیعی مقادیر بالاتری در تک لایه مشاهده می‌شود.

همچنین در یک نسبت h/a و a/r_x خاص درصد اختلاف بین تئوری RHOST12 و حل دقیق در حالت کامپوزیت دولایه نسبت به حالت تک لایه همگن کمتر است. به طوری که به عنوان مثال در نسبت‌های $a/r_x = 1$ و $h/a = 0.05$ در حالت تک لایه همگن درصد اختلاف با حل دقیق برای تئوری RHOST12 و PSDT به ترتیب برابر با $2/75\%$ و $5/87\%$ است و در همین شرایط برای حال دولایه (۰/۹۰) این اختلاف به ترتیب به $1/0.8\%$ و $2/13\%$ تقلیل پیدا می‌کند.

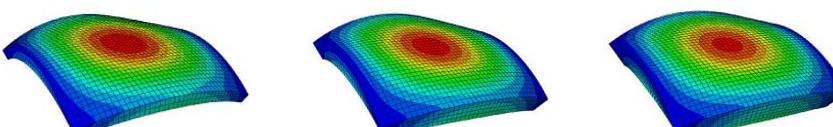
$$\frac{G_{23}}{E_2} = 0.2 \\ \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

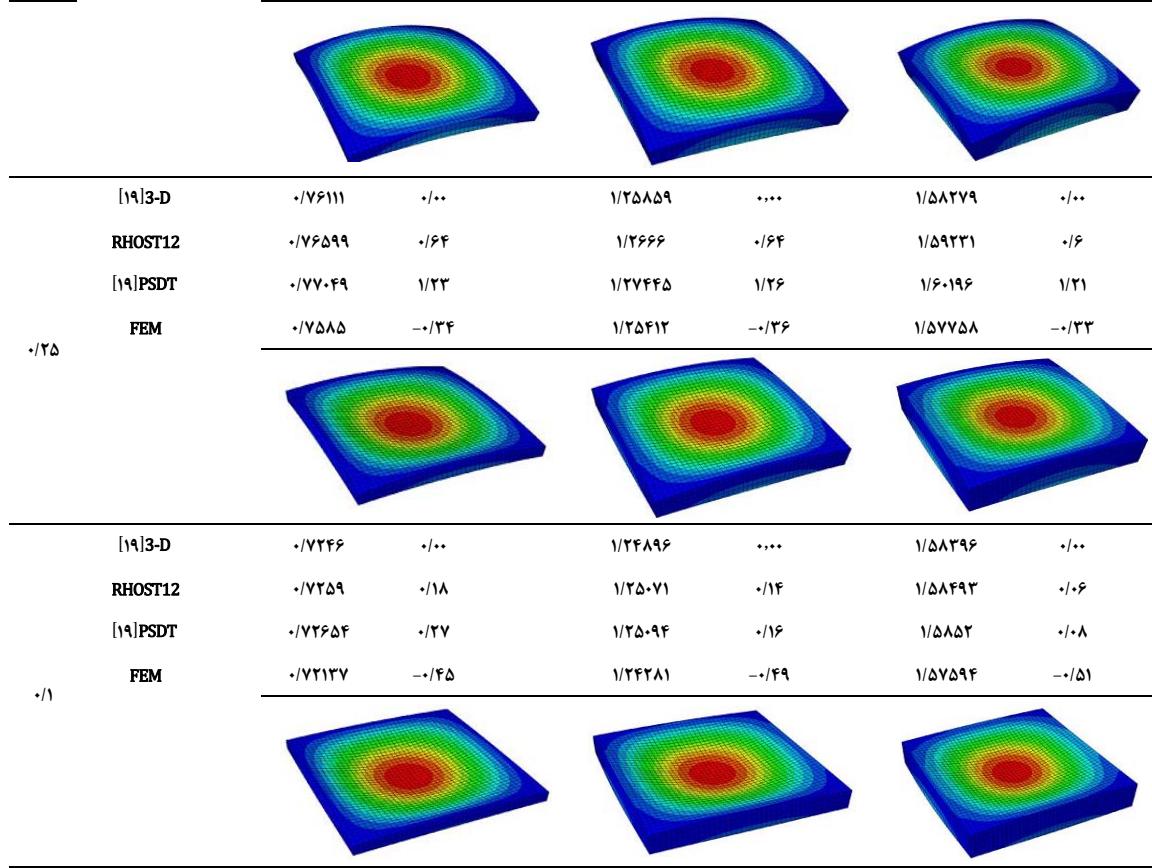
در جدول (۲) مقادیر مربوط به پوسته ارتوتروپیک تک لایه همگن بین حل دقیق سه‌بعدی، تئوری RHOST12 ارائه شده در پژوهش حاضر و تئوری مرتبه بالای تئوری [۱۹] مورد مقایسه قرار گرفته است. درصد تفاوت با حل دقیق گویای دقت بالای تئوری ارائه شده می‌باشد. همچنین به منظور مقایسه با نتایج حل عددی تحلیل المان محدود با استفاده نرم‌افزار آباکوس انجام گرفته است. همان‌طور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود، با کاهش نسبت a/r_x ، دقت تئوری مرتبه بالای ارائه شده افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای $a/r_x = 1$ و $h/a = 0.05$ درصد اختلاف بین تئوری RHOST12 و حل دقیق $2/75\%$ است که این اختلاف در $a/r_x = 0.1$ و $h/a = 0.05$ به $1/18\%$ کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که با افزایش نسبت h/a دقت تئوری RHOST12 کاهش می‌یابد. به طور مثال برای $a/r_x = 1$ و $h/a = 0.15$ درصد اختلاف بین تئوری حاضر و حل دقیق به $7/34\%$ می‌رسد.

کوچکترین پارامتر فرکانسی مربوط به پوسته کامپوزیتی دو انتخابی کروی متقاطع نامتقارن با لایه چینی (۰/۹۰) حاصل از تئوری RHOST12 با حل دقیق و تئوری مرتبه بالای موجود در مرجع [۱۹] در جدول (۳) برای نسبت‌های مختلف h/a و a/r_x مورد مقایسه قرار گرفته

جدول ۲- مقایسه پارامتر فرکانس برای پوسته دو انتخابی تک لایه همگن بین تئوری‌های مختلف و به ازای مقادیر متفاوت h/a , a/r_x

a/r_x	Theory	$h/a = 0.05$	$h/a = 0.1$	$h/a = 0.15$
1	[۱۹]3-D	1/۲۱۴۰۳	...	1/۶۰۰۴۱
	RHOST12	1/۲۴۷۴	۲/۷۵	1/۷۱۷۹۲
	[۱۹]PSDT	1/۲۸۵۲۵	۵/۸۷	1/۹۸۳/۸۴
	FEM	1/۱۸۶۱۳	-۲/۳	1/۶۴۳۸۶
0.5	[۱۹]3-D	0/۸۷۷۰۲	0/۰۰	1/۵۸۰۶۸
	RHOST12	0/۸۹۱۷۸	1/۶۸	1/۶۱۸۴۷
	[۱۹]PSDT	0/۹۰۶۹۷	۳/۴۱	1/۶۵۸۸۸
	FEM	0/۸۸۴۷۹	0/۸۹	1/۶۰۸۳۶

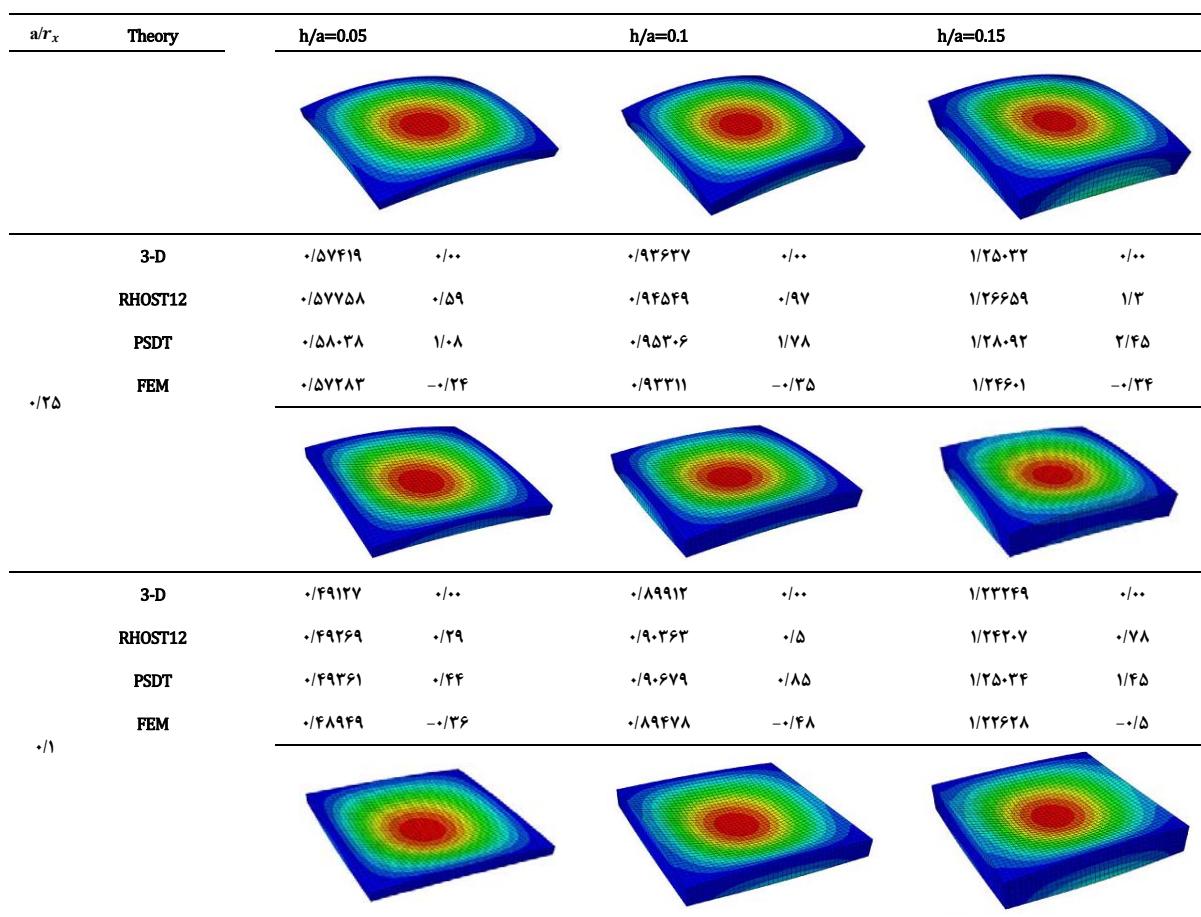




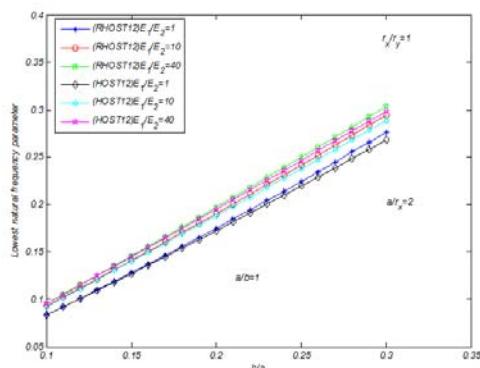
* درصد تفاوت: $\frac{|(19) - (19)|}{(19)} \times 100\%$ تئوری مورد بررسی

جدول ۳- مقایسه پارامتر فرکانس برای پوسته دو انحنایی دولایه ($a/r_x = 0.90$) بین تئوری‌های مختلف و به ازای مقادیر متفاوت h/a , a/r_x

a/r_x	Theory	$h/a=0.05$		$h/a=0.1$		$h/a=0.15$	
		$h/a=0.05$	$h/a=0.1$	$h/a=0.1$	$h/a=0.15$	$h/a=0.15$	$h/a=0.15$
3-D		۱/۲۹۸۲۵	+/۰۰	۱/۲۹۹۷۴	+/۰۰	۱/۵۱۹۳۶	+
RHOST12		۱.۳۱۲۲۱	۱/۸	۱/۴۴۶۶۲	۲/۳۵	۱/۶۰۴۱۸	۵/۵۸
PSDT		۱/۳۲۵۹۵	۲/۱۳	۱/۴۹۰۷۵	۶/۵	۱/۶۸۱۱۴۱	۱۰/۶۷
FEM		۱/۳۴۳۵۹	۲/۴۸	۱/۴۶۱۰۲	۴/۳۸	۱/۵۹۲۰۳	۴/۷۸
۱							
+/۵							



۱- ابتدا روند افزایشی دارد و بعد از عبور از $r_x/r_y = 0$ نرخ افزایش کم می‌شود. در شکل (۲) تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب شماره مود (n) و به ازای $a/r_x = 3$ $r_x/r_y = 1$ $a/b = 1$ $h/a = 0.3$ (n) شده است. شکل نشان می‌دهد که برای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی با افزایش شماره مود پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. ضمن اینکه در شماره مودهای بالاتر درصد اختلاف بین دو تئوری RHOST12 و HOST12 بیشتر می‌گردد.



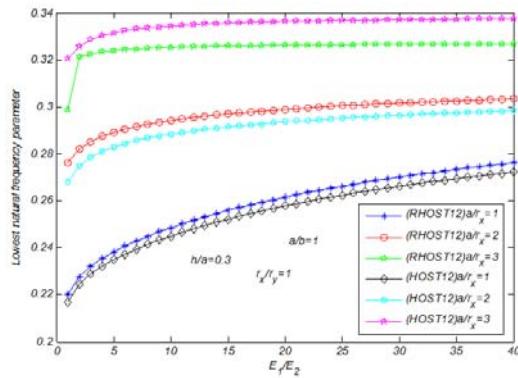
شکل ۵- تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت h/a برای نسبت‌های ارتوتروپی مختلف

شایان ذکر است که در تمامی شکل‌های این بخش پارامتر فرکانسی به صورت زیر انتخاب شده است:

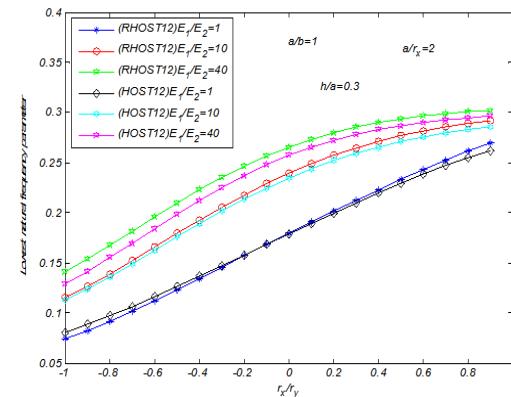
$$\omega = \omega \frac{a}{b} \sqrt{\rho \square^2 / G_{12}} \quad (54)$$

شکل (۵) تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی را بر حسب نسبت ضخامت به طول h/a به ازای $a/b = 1$ ، $a/r_x = 3$ ، $r_x/r_y = 1$ ، $E_1/E_2 = 1, 10, 40$ و $E_f/E_2 = 1, 2$ برای نسبت‌های ارتوتروپی RHOST12 نمایش می‌دهد. نتایج در این شکل برای دو تئوری RHOST12 و HOST12 محاسبه شده‌اند. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود، پارامتر فرکانسی با افزایش h/a با شبیه یکنواخت به ازای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی افزایش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که پارامتر فرکانسی با افزایش نسبت ارتوتروپی مقدار بالاتری به خود می‌گیرد.

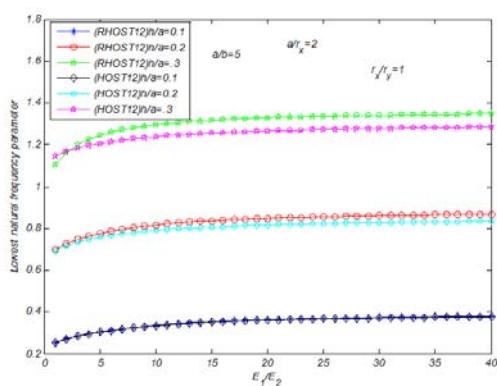
تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب r_x/r_y و به ازای $a/r_x = 2$ ، $a/b = 1$ ، $h/a = 0.3$ برای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی E_1/E_2 در شکل (۶) مورد بررسی قرار گرفته است. اختلاف بین دو تئوری RHOST12 و HOST12 در نسبت $E_1/E_2 = 40$ بهوضوح دیده می‌شود. شبیه تغییرات پارامتر فرکانسی از r_x/r_y



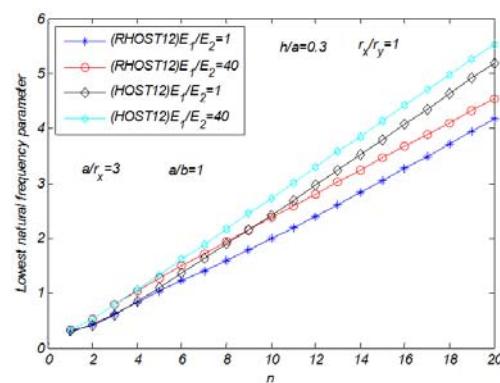
شکل ۹- تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت E_1/E_2 برای نسبت‌های a/b



شکل ۶- تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت r_x/r_y برای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی

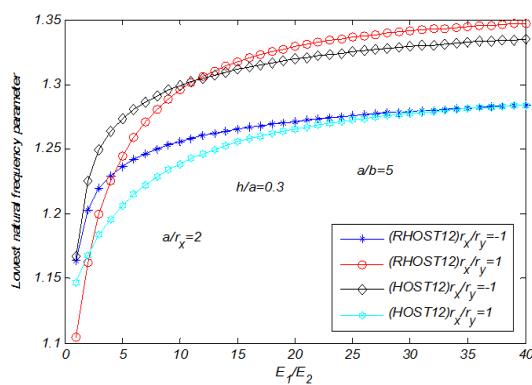


شکل ۱۰- تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت E_1/E_2 برای نسبت‌های h/a

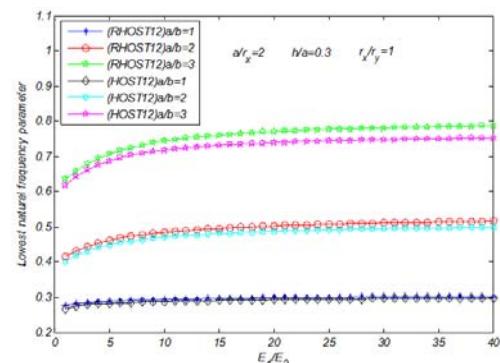


شکل ۷- تغییرات پارامتر فرکانسی بر حسب شماره مودهای محیطی مختلف و به ازای نسبت‌های مختلف ارتوتروپی

در شکل (۱۱) تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت ارتوتروپی و به ازای $h/a = 0.3$ و $a/b = 5$ و $a/r_x = 2$ و $r_x/r_y = -1,1$ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود به ازای نسبت‌های ارتوتروپی کمتر از ۴ پارامتر فرکانسی در $r_x/r_y = 1$ کمتر از $r_x/r_y = -1$ است، ولی بعد از آن این روند معکوس می‌گردد.



شکل ۱۱- تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت E_1/E_2 برای نسبت‌های r_x/r_y



شکل ۸- تغییرات کوچکترین پارامتر فرکانسی بر حسب نسبت E_1/E_2 برای نسبت‌های r_x/r_y

شکل ۱۲ - پوسته مشبک دو انتخابی مدل‌سازی شده در نرم‌افزار کتیا

در این قسمت به منظور بررسی اثر نسبت چگالی پرکننده به چگالی ریب و مدول یانگ پرکننده به مدول یانگ ریب بر دقت نتایج، حفره‌ای با ابعاد 50×50 بر روی پوسته مشبک را در محاسبات وارد کرد که این ناحیه مربوط به مواد پرکننده در نظر گرفته می‌شود. فرکانس طبیعی برای نسبت‌های مختلف چگالی ماده پرکننده به چگالی ریب در جدول (۵) ارائه شده است. در این جدول که $\frac{E_{bay}}{E_{rib}} = 1$ است، نتایج نشان می‌دهد که کاهش نسبت $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$ افزایش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت. همچنین با کاهش این نسبت و نزدیک شدن آن به صفر درصد اختلاف بین نتایج حل عددی و تئوری حاضر افزایش خواهد یافت.

در جدول (۶) فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف نسبت مدول یانگ ماده پرکننده به مدول یانگ ریب آمده است. در این جدول $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}} = 1$ است و همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش نسبت $\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$ فرکانس طبیعی نیز با کاهش مواجه خواهد شد.

اکنون به منظور بررسی تأثیر افزایش تعداد خانه‌ها بر پاسخ‌های حاصله، تعداد خانه‌ها به 15×15 افزایش داده می‌شود. فرکانس طبیعی برای نسبت‌های مختلف چگالی ماده پرکننده به چگالی ریب در جدول (۷) ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهد که کاهش نسبت $\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$ افزایش فرکانس طبیعی را در پی خواهد داشت.

در جدول (۸) فرکانس طبیعی برای مقادیر مختلف نسبت مدول یانگ ماده پرکننده به مدول یانگ ریب آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش نسبت $\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$ فرکانس طبیعی نیز کاهش خواهد یافت.

پوسته مشبک با ریب‌های ارتوتروپیک

به منظور بررسی پوسته مشبک با ریب‌های ارتوتروپیک، در این قسمت پوسته‌ای با خواص ماده زیر در نظر می‌شود و اثر نسبت ارتوتروپی در سه مود ابتدایی بین نتایج تئوری حاضر و حل عددی مقایسه می‌شود.

$$\frac{E_{bay}}{E_{rib1}} = 1$$

$$v_{bay} = v_{rib} = 0.25$$

$$\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib1}} = \frac{\rho_{rib1}}{\rho_{rib2}} = 1$$

جدول ۴ - مقایسه تأثیر ابعاد حفره در پوسته دو انتخابی بر فرکانس طبیعی

ابعاد حفره ابعاد کل پوسته	فرکانس طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)		ابعاد حفره ابعاد کل پوسته	فرکانس طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)	
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده		تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده
بدون حفره	۰/۰۰۰۸۸۶	۰/۰۰۰۸۲۲	۰/۰۶۲	۰/۰۰۰۸۶۸	۰/۰۰۰۸۸۴

پوسته‌های مشبک دو انتخابی

همان‌طور که قبلاً گفته شد به دلیل تفاوت در خواص ریب‌ها و مواد پرکننده می‌باشد توسط یکتابع توزیع، این عدم یکنواختی موجود در سفتی و جرم پوسته مشبک را در محاسبات وارد کرد که این امر توسط تابع پله‌ای هویساید انجام گرفت، سپس با به دست آوردن ماتریس‌های سفتی و جرم، فرکانس‌های طبیعی استخراج شد.

با توجه به اطلاع نویسنده بر عدم وجود پژوهش متناظر برای صحه‌گذاری ناگزیر مقادیر به دست آمده از تئوری حاضر با نتایج حل عددی مقایسه شد.

پوسته مشبک با ریب‌های ایزوتروپیک

در این قسمت خواص ریب‌ها به صورت ایزوتروپیک ($v = 0.3$) در نظر گرفته می‌شود. همچنین ابعاد پوسته مشبک بر حسب میلی متر به صورت زیر است:

$$a \times b = 120 \times 120$$

$$r_x = r_y = 200$$

$$\square = 6$$

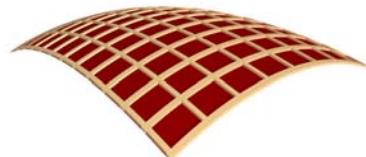
$$\square_{rx} = \square_{ry} = 1.9$$

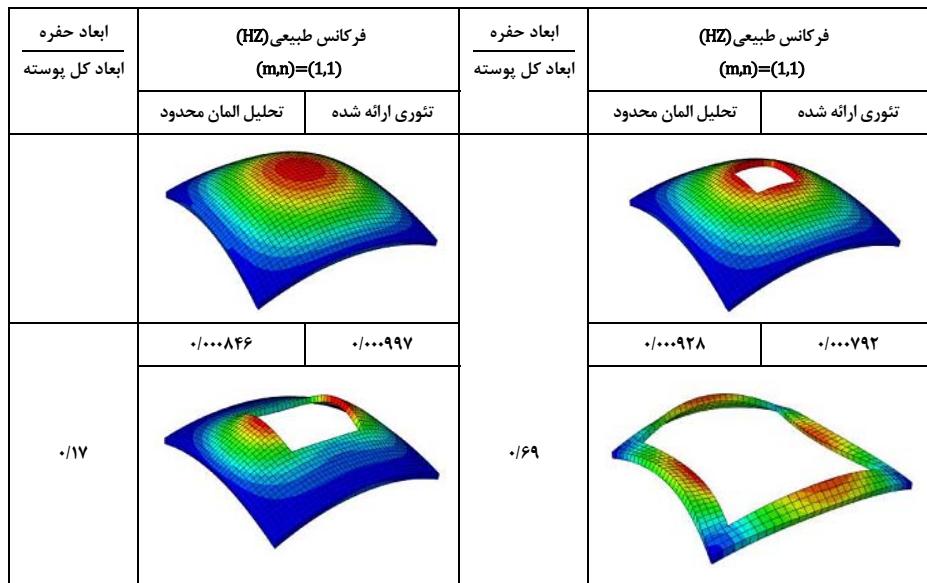
$$\square_{bx} = \square_{by} = 4$$

در ابتدا برای اینکه اثر ابعاد حفره‌ها در یک پوسته دو انتخابی بر پاسخ‌های دریافتی از اعمال تئوری پوسته اطلاع حاصل شود، در پوسته‌ای با ابعاد مشخص حفره‌هایی با ابعاد متفاوت ایجاد شده و نتایج حاصل از حل عددی با نتایج به دست آمده از تئوری حاضر در جدول (۴) مقایسه شده‌اند.

مطابق با نتایج به دست آمده درصد اختلاف بین تئوری RHOST12 و تحلیل المان محدود برای نسبت ابعاد $0/062$ برابر با $2/32\%$ و برای نسبت ابعاد $0/078$ برابر با $17/8\%$ خواهد بود.

حل عددی با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس انجام پذیرفت. المان استفاده شده در تحلیل، از نوع 20 گره‌ای (C3D20R) می‌باشد. در شکل (۱۲) ریب‌ها و مواد پرکننده با رنگ متفاوت در نرم‌افزار آباکوس نشان داده شده است.





جدول ۷- مقایسه فرکанс طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته مشبک دو انتخابی و به ازای $1 = \frac{E_{bay}}{E_{rib}}$ و نسبت‌های مختلف ρ_{bay}/ρ_{rib}

$\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$	فرکansk طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
1	•/۰۰۰۸۸۶	•/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
•/۹	•/۰۰۰۹۱۳	•/۰۰۰۸۴۶	-۷/۳۴
•/۸	•/۰۰۰۹۴۲	•/۰۰۰۸۷۴	-۷/۲۲
•/۵	•/۰۰۱۰۵۱	•/۰۰۰۹۷۴	-۷/۳۳
•/۳	•/۰۰۱۱۵	•/۰۰۱۰۶۱	-۷/۷۴
•/۱	•/۰۰۱۲۸۲	•/۰۱۱۸۲	-۷/۸
•	•/۰۰۱۳۶۷	•/۰۰۱۲۶۱	-۷/۷۵

جدول ۸- مقایسه فرکansk طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته مشبک دو انتخابی و به ازای نسبت‌های مختلف E_{bay}/E_{rib}

$\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$	فرکansk طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
1	•/۰۰۰۸۸۶	•/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
•/۹	•/۰۰۰۸۶	•/۰۰۰۸۰۲	-۶/۷۴
•/۸	•/۰۰۰۸۳۱	•/۰۰۰۷۸۱	-۶/۰۲
•/۵	•/۰۰۰۷۲۲	•/۰۰۰۷۱۳	-۱/۲۵
•/۳	•/۰۰۰۶۱۵	•/۰۰۰۶۶۶	۸/۲۹
•/۱	•/۰۰۰۴۲۴	•/۰۰۰۶۰۷	۴۳/۱۶

همچنین ابعاد پوسته مشبک نیز به صورت شکل (۱۳) است:

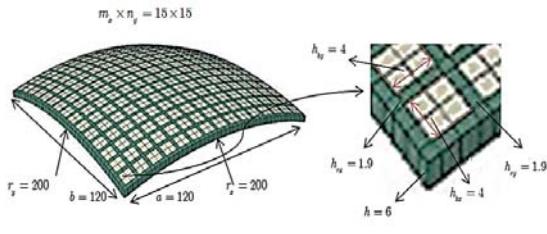
جدول ۹- مقایسه فرکansk طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته دو انتخابی با یک حفره و به ازای نسبت‌های مختلف ρ_{bay}/ρ_{rib}

$\frac{\rho_{bay}}{\rho_{rib}}$	فرکansk طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
1	•/۰۰۰۸۸۶	•/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
•/۹	•/۰۰۰۸۹	•/۰۰۰۸۴۴	-۵/۱۷
•/۸	•/۰۰۰۸۹۵	•/۰۰۰۸۶۷	-۳/۱۳
•/۵	•/۰۰۰۹۰۹	•/۰۰۰۹۵۲	۴/۷۳
•/۳	•/۰۰۰۹۱۸	•/۰۰۱۰۲۵	۱۱/۶۶
•/۱	•/۰۰۰۹۲۷	•/۰۰۱۱۱۸	۲۰/۶
•	•/۰۰۰۹۳۱	•/۰۰۱۱۷۵	۲۶/۲۱

جدول ۱۰- مقایسه فرکansk طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته دو انتخابی با یک حفره و به ازای $1 = \frac{E_{bay}}{E_{rib}}$ و نسبت‌های مختلف ρ_{bay}/ρ_{rib}

$\frac{E_{bay}}{E_{rib}}$	فرکansk طبیعی (Hz) (m,n)=(1,1)		
	تحلیل المان محدود	تئوری ارائه شده	درصد اختلاف
1	•/۰۰۰۸۸۶	•/۰۰۰۸۲۲	-۷/۲۲
•/۹	•/۰۰۰۸۸۴	•/۰۰۰۸۱۹	-۷/۳۵
•/۸	•/۰۰۰۸۸۱	•/۰۰۰۸۱۵	۷/۴۹
•/۵	•/۰۰۰۸۷۱	•/۰۰۰۸۰۴	-۷/۶۹
•/۳	•/۰۰۰۸۵۹	•/۰۰۰۷۹۸	-۷/۱
•/۱	•/۰۰۰۸۱	•/۰۰۰۷۴۴	-۸/۱۵
•/۰۱	•/۰۰۰۷۷۶	•/۰۰۰۷۳۵	-۵/۲۸

در جدول (۹) که برخلاف موارد قبلی جنس ریب‌ها ارتوتروپیک است، سه مود ابتداًی برای نسبت‌های ارتوتروپی مختلف بین نتایج حاصل از تئوری حاضر و حل به کمک المان محدود باهم مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ارتوتروپی و افزایش شماره مود، فرکانس طبیعی نیز افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۱۳- نمایش پارامترهای هندسی بر روی پوسته

جدول ۹- مقایسه فرکانس طبیعی بین نتایج تئوری حاضر و حل المان محدود در پوسته مشبک دو انحنای و به ازای نسبت‌های مختلف E_{rib1}/E_{rib2}

E_{rib1}/E_{rib2}	فرکانس طبیعی (Hz)(m=1)								
	n=1			n=2			n=3		
	FEM	تئوری حاضر	درصد اختلاف	FEM	تئوری حاضر	درصد اختلاف	FEM	تئوری حاضر	درصد اختلاف
۱	۰/۰۰۰۸۶۶	۰/۰۰۰۸۲۲	-۵/۰۸	۰/۰۰۰۹۸۶	۰/۰۰۱۰۱۳	۲/۷۴	۰/۰۰۱۳۹	۰/۰۰۱۴۹۳	۷/۴۱
۲	۰/۰۰۰۸۸۵	۰/۰۰۰۸۳۹	-۵/۲	۰/۰۰۱۰۲۶	۰/۰۰۱۰۲۴	-۰/۱۹	۰/۰۰۱۴۶۵	۰/۰۰۱۵۰۱	۲/۴۶
۳	۰/۰۰۰۹۰۱	۰/۰۰۰۸۵۵	-۵/۱۱	۰/۰۰۱۰۰۶	۰/۰۰۱۰۳۵	-۲/۳۶	۰/۰۰۱۵۳	۰/۰۰۱۵۰۹	-۱/۳۷
۴	۰/۰۰۰۹۱۵	۰/۰۰۰۸۷۲	-۴/۷	۰/۰۰۱۰۸۹	۰/۰۰۱۰۴۶	-۳/۹۵	۰/۰۰۱۵۸۶	۰/۰۰۱۵۱۷	-۴/۳۵
۱۰	۰/۰۰۰۹۷	۰/۰۰۰۹۵۲	۸	۰/۰۰۱۲۱۷	۰/۰۰۱۱۰۱	-۹/۵۳	۰/۰۰۱۸۴۳	۰/۰۰۱۵۶۱	-۱۵/۳

مشاهدات در مورد پوسته‌های مشبک، گویای این مطلب است که با افزایش نسبت تعداد خانه‌ها در آن‌ها نسبت به کل پوسته، دقت تئوری حاضر در مقایسه با حل عددی بالاتر می‌رود و بنابراین در استفاده از این تئوری، این نکته باید مدنظر قرار گیرد. در پوسته‌های مشبک با ریب‌هایی با جنس غیرهمسانگرد، مشاهده شد که با افزایش نسبت ارتوتروپی فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند؛ به علاوه با افزایش شماره مودها نیز این افزایش مشاهده می‌شود.

تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافعی توسط نویسندهای بیان نشده است.

مراجع

- [1] C. Omid'Varan, "Free vibration of grid-stiffened plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 19, No. 4, pp. 463-472, 1971.

نتیجه‌گیری

در پوسته‌های کامپوزیتی با دو انحنا، مشاهده می‌شود که در ابتدا با افزایش نسبت ارتوتروپی E_1/E_2 پارامتر فرکانسی به ازای $1 = r_x/r_y$ مقدار بالاتری را نسبت به $-1 = r_x/r_y$ دارد و بعد از آن پارامتر فرکانسی در $1 = r_x/r_y$ کمتر از $-1 = r_x/r_y$ می‌گردد. همچنین در این پوسته‌ها با افزایش a/r_x و h/a پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد.

همواره ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت ارتوتروپی E_1/E_2 پارامتر فرکانسی افزایش پیدا می‌کند و در نسبت‌های بالاتر این تعییرات کاهش می‌یابد.

در مورد پوسته‌های مشبک مشخص شد که با افزایش نسبت ابعادی حفره به ابعاد کل پوسته نتایج حاصل از تئوری حاضر و حل عددی اختلاف زیادی باهم پیدا می‌کنند و این نشان می‌دهد که تئوری مذکور که اصولاً یک تئوری پوسته است، در محدوده مشخصی قادر به پاسخگویی در سازه مشبک است.

- sandwich shells." *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 205-235, 2006.
- [13] C.W. Bert, "Structural theory for laminated anisotropic elastic shells." *Journal of Composite Materials*, Vol. 1, No. 4, pp. 414-423, 1967.
- [14] A. Leissa and J.-D. Chang, "Elastic deformation of thick, laminated composite shells." *Composite structures*, Vol. 35, No. 2, pp. 153-170, 1996.
- [15] J. Ye and K. Soldatos, "Three-dimensional vibration of laminated cylinders and cylindrical panels with symmetric or antisymmetric cross-ply lay-up. *Composites Engineering*," Vol. 4, No. 4, pp. 429-444, 1994.
- [16] M.S. Qatu, *Vibration of laminated shells and plates*: Elsevier, 2004.
- [17] J.N. Reddy, *Energy principles and variational methods in applied mechanics*: John Wiley & Sons, 2002.
- [18] G. Li and J. Cheng, A generalized analytical modeling of grid stiffened composite structures. *Journal of Composite Materials*, Vol. 41, No. 24, pp. 2939-2969, 2007.
- [19] A.Bhimaraddi, "Free vibration analysis of doubly curved shallow shells on rectangular planform using three-dimensional elasticity theory." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 7, pp. 897-913, 1991.
- [20] M. Zarei, G.H. Rahimi, M. Hemmatnezhad, "Free vibrational characteristics of grid-stiffened truncated composite conical shells," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 99, 2020, 105717.
- [21] T. Liu, Zh. Min Li, P. Qiao, S. Jin, "A novel C1 continuity finite element based on Mindlin theory for doubly-curved laminated composite shells," *Thin-Walled Structures*, Vol. 167, 2021, 108155.
- [22] M. Qatu, "Theory and vibration analysis of laminated barrel thin shells," *Journal of Vibration and Control*, pp.851-889, 1999.
- [2] C. Omid'Varan, and W. Delagarza, "Vibration of monolithic grid-stiffened plates." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 26, No .1,pp. 21-28, 1973.
- [3] R.K. Khare, V. Rode, A.K. Garg, and S.P. John, "Higher-order closed-form solutions for thick laminated sandwich shells." *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 7, No. 4, pp. 335-358, 2005.
- [4] M. Tooranl, and A. Lakis, "Free vibrations of non-uniform composite cylindrical shells." *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 236, No. 17, pp. 1748-1758, 2006.
- [5] C.K. Kundu and J.H. Han, "Vibration characteristics and snapping behavior of hygro-thermo-elastic composite doubly curved shells." *Composite Structures*, Vol. 91, No. 3, pp. 306-317, 2009.
- [6] S. Chorfi and A. Houmat, "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form." *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2573-2581, 2010.
- [7] K. Sayad, "Analytical study of the effect of shear between the layers on the local buckling of a polymer composite lattice cylinder under compressive axial load." *10th Conference of Iranian Aerospace Society, Iranian Aerospace Society*, 2010 (in Persian).
- [8] J. Mantari and C.Guedes Soares, "Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory." *Composite Structures*, Vol. 94, No. 8, pp. 2640-2656, 2012.
- [9] P. Edalata, M.R. Khedmati and C.G. Soares, "Free vibration and dynamic response analysis of stiffened parabolic shells using equivalent orthotropic shell parameters." *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, No. 4, pp. 747-766, 2013.
- [10] S.S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley and Sons, 2007.
- [11] K. Liew and C. Lim, "A higher-order theory for vibration of doubly curved shallow shells." *Journal of applied mechanics*, Vol. 63, No. 3, pp. 587-593, 1996.
- [12] A.K. Garg, R.K. Khare, and T. Kant, "Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and