

ارزیابی حل معادلات لایه مرزی و روابط تقریب مهندسی در گرمایش آیرودینامیکی اجسام متقارن محوری بازگشتی

رامین کمالی مقدم^{۱*}، سحر نوری^۲، محمدرضا سلیمی^۳، مجتبی شیدا^۴ و سیدامیر حسینی^۵

۱، ۳، ۴ و ۵ - پژوهشکده سامانه‌های فضانوردی، پژوهشگاه فضایی ایران

۲ - دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

*ایران، تهران، شهرک قدس

rkamali@ari.ac.ir

در فرآیند طراحی، هنگامی که از یک حلگر برای تحلیل اجسام بازگشتی ماورای صوت استفاده شود، داشتن سرعت بالای محاسباتی در کنار دقت مناسب نتایج از نکات کلیدی محسوب می‌شود. در تحقیق حاضر، نتایج حاصل از حل معادلات لایه مرزی آرام با استفاده از روش ماتریس انتگرالی و استفاده از روابط تقریب مهندسی در تخمین گرمایش آیرودینامیکی حول اجسام ماورای صوت متقارن محوری بازگشتی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند که روش‌های به کار رفته دارای دقت مناسب در تحلیل گرمایش آیرودینامیکی اجسام متقارن محوری بوده و دارای سرعت بالا در راستای طراحی آیرودینامیکی اجسام بازگشتی هستند. برداشتن گام مکانی در شبیه‌سازی عددی معادلات لایه مرزی و همچنین استفاده از تعداد نقاط شبکه کمتر در لایه مرزی به دلیل استفاده از روش ماتریس انتگرالی نسبت به سایر روش‌های عددی، سرعت تحلیل معادلات لایه مرزی را به شدت افزایش می‌دهد. همچنین انعطاف‌پذیری بالای روابط تقریب مهندسی در تخمین شار حرارتی روی سطح اجسام بازگشتی، استفاده از آنها را برای طراحی مناسب می‌سازد. استفاده از یک رابطه تقریب مهندسی جداگانه برای ناحیه سکون نتایج گرمایش آیرودینامیکی روش تقریبی را در این ناحیه بهبود می‌بخشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات لایه مرزی غیرتشابهی، روابط تقریب مهندسی، روش ماتریس انتگرالی، گرمایش آیرودینامیکی، جریان ماورای صوت، جسم متقارن محوری

علائم و اختصارات

ρ	چگالی		
u	سرعت در راستای جریان		
v	سرعت عمود بر جریان	Pr	عدد پراوندل
x	مختصه مماس بر سطح	μ	لزجت سیال
y	مختصه عمود بر سطح	St	عدد استانتون
p	فشار	Re	عدد رینولدز
H	آنتالپی کل	C_f	ضریب اصطکاک
r	شعاع انحنای سطح	R	ضریب بازیافت
		$j = 0$	جریان دوبعدی
		$j = 1$	جریان تقارن محوری

مقدمه

تعیین شار حرارتی روی سطح جسم به‌عنوان اطلاعات مورد نیاز برای طراحی سپرهای حرارتی و مواد فداشونده، تخمین تنش برشی روی سطح به‌منظور محاسبه اتلافات نیروی پیشران و طراحی

۱. استادیار (نویسنده مخاطب)

۲. استادیار

۳. دانشجوی دکتری

۴. دانشجوی دکتری

۵. پژوهشگر

آیرودینامیکی در حالت جریان آرام و مغشوش برای هندسه‌هایی با دماغه پخ مورد استفاده قرار گرفته‌است.

در تحقیق حاضر، گرمایش آیرودینامیکی حول اجسام متقارن محوری در جریان ماورای صوت به دو روش حل معادلات لایه‌مرزی غیرتشابهی با استفاده از روش ماتریس انتگرالی و روابط تقریب مهندسی با فرض جریان آرام و گاز کامل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. معادلات لایه‌مرزی و روابط تقریبی به‌کاررفته تشریح شده و الگوریتم حل به دو روش به تفصیل بیان می‌شود. از آنجا که معادلات لایه‌مرزی برای حالت پایا بیان می‌شوند، برداشتن گام مکانی در شبیه‌سازی عددی آنها، سرعت تحلیل را به شدت افزایش می‌دهد. روش ماتریس انتگرالی نیز با فراهم‌ساختن امکان استفاده از تعداد نقاط شبکه کمتر در لایه‌مرزی به نسبت سایر روش‌های عددی همچون روش اختلاف محدود، سرعت حل معادلات فوق را با حفظ دقت بیشتر کرده و استفاده از الگوریتم فوق را برای طراحی مناسب‌تر می‌سازد. در تخمین شار حرارتی روی سطح جسم به روش تقریبی نیز از روابط توسعه داده شده توسط زوبی استفاده شده‌است. از آنجا که روابط تقریبی فوق برای اجسام سرپخ در جریان ماورای صوت حاصل شده، نتایج روی چند هندسه متقارن محوری سرپخ به دو روش تهیه شده و با نتایج تجربی مقایسه شده‌است. انعطاف‌پذیری بالای روابط تقریب مهندسی در تخمین شار حرارتی روی سطح اجسام بازگشتی، استفاده از آنها را برای طراحی مناسب می‌سازد. تحقیقات حاضر نشان می‌دهد که رابطه تقریبی معمول در محاسبات گرمایش آیرودینامیکی برای نواحی سکون اعتبار نداشته و جهت به‌دست آوردن نتایج فیزیکی نیاز است از روابط تقریب مهندسی دیگری برای این ناحیه استفاده شود.

معادلات لایه‌مرزی

تئوری لایه‌مرزی در سال ۱۹۰۴ توسط پراندل [۱۲] معرفی شد. با استفاده از این تئوری می‌توان جریان حول یک جسم در حال پرواز را مدل‌سازی کرد. این تئوری بر این پایه استوار است که در اعداد رینولدز بالا اثرات مربوط به پخش در مقابل با جابه‌جایی تضعیف شده و بنابراین جریان خارجی حول یک جسم را می‌توان به دو ناحیه غیرلزج (خارج لایه‌مرزی) و لزج (داخل لایه‌مرزی) تقسیم کرد. در تحقیق حاضر، حل ناحیه خارج از لایه‌مرزی توسط یک تحلیلگر جریان غیرلزج (مانند نرم‌افزار فلونت) صورت می‌گیرد. نتایج حاصل از حل غیرلزج که شامل اندازه سرعت، مقدار فشار و دمای سیال روی سطح هستند در مرحله بعد جهت تحلیل معادلات لایه‌مرزی توسط حلگر توسعه داده شده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نازل‌ها و دماغه‌ها همواره اهمیت ویژه‌ای دارد. در رژیم سرعت‌های ماورای صوت به دلیل وجود جریان‌های با سرعت و آنتالپی بالا، استفاده از امکانات آزمایشگاهی محدودیت پیدا می‌کند. این محدودیت سبب می‌شود که دینامیک سیالات محاسباتی به عنوان یک ابزار قدرتمند در شبیه‌سازی و طراحی وسایل پرنده ابرصوتی مورد توجه قرار گیرد. به‌منظور شبیه‌سازی عددی کامل و دقیق رفتار سیال حول اجسام آیرودینامیکی استفاده از معادلات ناویر-استوکس کامل، ضروری است. اما با وجود پیشرفت‌های فراوانی که در زمینه سخت‌افزار کامپیوترها و پردازش موازی صورت گرفته است تمامی متخصصان CFD به خوبی آگاهند که تحلیل عددی مسائل مختلف با استفاده از این سیستم معادلات نیازمند تلاش محاسباتی بسیار بالا بوده و بسیار زمانبر است. از طرفی برای طراح اجسام پرنده، زمان از پارامترهای اساسی محسوب می‌شود و لذا صرف زمان بالا در طراحی، هزینه‌بر بوده و مناسب طراحی اولیه نیست. این مسئله سبب شده که روش‌های سریع با دقت مناسب در زمینه گرمایش آیرودینامیکی مورد توجه قرار گیرند. در این راستا، ساده‌سازی معادلات ناویر-استوکس با استفاده از روابط تقریبی گرمایش آیرودینامیکی با توجه به نوع مسئله مورد تحلیل تا جایی که دقت و فیزیک مسئله را تحت تأثیر قرار ندهد امری منطقی و معقول است. معادلات لایه‌نازک (TLNS)، سهموی (PNS)، لایه شوک لزج (VSL) و لایه‌مرزی (BL) نمونه‌هایی از معادلات ساده‌شده‌ای هستند که از سیستم معادلات ناویر-استوکس کامل به‌دست آمده و در تحلیل جریان‌های ماورای صوت و گرمایش آیرودینامیکی اجسام بازگشتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. معادلات لایه‌مرزی نیز به دلیل سرعت محاسباتی و دقت بالا همواره در طراحی اجسام بازگشتی ماورای صوت مورد توجه محققان بوده است [۵-۱]. با توجه به ماهیت جریان ماورای صوت روی اجسام پرنده، فرضیات معادلات لایه‌مرزی برای حل جریان ماورای صوت قابل قبول بوده و نتایج دقیقی به‌دست می‌دهد. تخمین گرمایش آیرودینامیکی به روش تقریبی نیز به دلیل سرعت بالای محاسباتی و همچنین انعطاف‌پذیری خوب آنها در حل شرایط مختلف جریان، از دیرباز مورد بررسی محققان و طراحان پرنده‌های آیرودینامیک بوده‌است [۱۰-۶]. در این راستا با استفاده از فرضیات متفاوت، روابط تقریبی مختلفی ارائه شده‌است که از مهم‌ترین آنها می‌توان به فعالیت‌های انجام شده توسط زوبی و همکارانش [۱۱] اشاره کرد. در این تحقیق نیز یک روش تقریب مهندسی به منظور حل نرخ گرمایش

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N}{Pr} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial g}{\partial \eta} + \frac{u_e^2}{H_e} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

که در آن $N = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}$ ، $g = \frac{H}{H_e}$ و $f = \frac{u}{u_e}$ هستند. جدول (۲) شرایط مرزی مرتبط با معادلات ۷ و ۸ را نشان می‌دهد.

جدول ۲- شرایط مرزی معادلات انتقال یافته لایه مرزی

روی لبه لایه مرزی	روی سطح
$f' = \frac{u_e}{u_e} = 1$	$f = 0$ و در صورت وجود دمش یا مکش: $f_w = -\frac{1}{\sqrt{2\xi}} \int_0^\xi \frac{\rho_w v_w}{\rho_e u_e \mu_e^j} d\xi$
$g = \frac{H_e}{H_e} = 1$	$f' = \frac{u(0)}{u_e} = 0$ $g = \frac{H(0)}{H_e} = \frac{H_{Wall}}{H_e}$ و در صورت ادیاباتیک بودن دیواره: $g' = 0$

روش ماتریس انتگرالی

اساس کار روش ماتریس انتگرالی بر استفاده از تعدادی چند جمله‌ای است که برای تقریب زدن کمیت‌های وابسته در فاصله بین نقاط شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرند. توابع ذکر شده به نحوی انتخاب می‌شوند که شروط پیوستگی کمیت‌ها و مشتقات اول و دوم آنها روی نقاط شبکه برآورده شود. بنابراین، استفاده از این روش امکان تقریب زدن کمیت‌های داخل لایه مرزی را با کمترین تراکم شبکه فراهم می‌سازد. استفاده از تعداد نقاط کم شبکه در ازای حفظ دقت را می‌توان مهم‌ترین امتیاز استفاده از روش انتگرال ماتریسی دانست که سرعت بالای حل معادلات لایه مرزی را موجب می‌شود. با انتگرال گیری در ξ ثابت و روی دو نقطه متوالی شبکه 1- j و j معادلات لایه مرزی به فرم زیر در می‌آیند [۱]:

$$(Nf'')_{j-1}^j + \int_{j-1}^j f f'' d\eta + \beta \int_{j-1}^j \frac{\rho_e}{\rho} d\eta - \beta \int_{j-1}^j f'^2 d\eta = \int_{j-1}^j 2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial(\ln \xi)} - f'' \frac{\partial f}{\partial(\ln \xi)} \right) d\eta \quad (9)$$

$$\left(\frac{N}{Pr} g' \right)_{j-1}^j + \frac{u_e^2}{H_e} \left(N \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) f' f'' \right)_{j-1}^j + \int_{j-1}^j f g' d\eta = \int_{j-1}^j 2 \left(f' \frac{\partial g}{\partial(\ln \xi)} - g' \frac{\partial f}{\partial(\ln \xi)} \right) d\eta \quad (10)$$

با استفاده از روش انتگرال جزء به جزء و بسط سری تیلور می‌توان انتگرال‌های موجود در عبارات ۹ و ۱۰ را محاسبه کرد. این صورت شکل گسسته شده معادلات مومنتم و انرژی به ترتیب مطابق عبارت‌های ۱۱ و ۱۲ به دست می‌آیند:

معادلات لایه مرزی آرام در حالت پایا برای هندسه‌های دوبعدی/ متقارن محوری به فرم زیر نوشته می‌شوند [۲]:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u r^j) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r^j) = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu r^j \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} r^j \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) r^j \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right) \quad (4)$$

معادلات فوق در ازای $j = 0$ دو بعدی و در ازای $j = 1$ متقارن محوری هستند. جدول (۱) شرایط مرزی مربوط به معادلات ۱ تا ۴ را نشان می‌دهد، با توجه در این جدول مشخص است که می‌توان اثرات دمش و مکش روی سطح را وارد محاسبات کرد. همچنین، سطح می‌تواند دما ثابت یا آدیاباتیک در نظر گرفته شود.

جدول ۱- شرایط مرزی معادلات لایه مرزی

روی لبه لایه مرزی	روی سطح
$u \rightarrow u_e$	$u = 0$ $v = 0$
$H = H_e$	$H = H_w$ یا $\left. \frac{dH}{dn} \right _w = 0$

جهت سادگی حل معادلات ۱-۴ مختصات جدیدی که در آن وابستگی معادلات در راستای جریان بسیار کمتر از جهت عمود است، تعریف شده و معادلات غیرتشابهی حاصل می‌شوند. لذا می‌توان با استفاده از تبدیل‌های موجود معادلات مشتق جزئی ۱-۴ را تبدیل به معادلات دیفرانسیلی معمولی کرد. یکی از پرکاربردترین توابع انتقال موجود روابط لوی- لیز (Levy-Lees) هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e r_b^{2j} dx \quad (5)$$

$$\eta(x, y) = u_e (2\xi)^{-1/2} \int_0^y \rho r^j dy \quad (6)$$

که در آنها اندیس e نشان دهنده شرایط روی لبه لایه مرزی است. با فرض نازک بودن لایه مرزی در مقایسه با ابعاد مسئله می‌توان r را ثابت فرض کرد و معادلات مومنتم و انرژی انتقال یافته را به فرم زیر نوشت [۱]:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right) = 2\xi \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (7)$$

با توجه به معادلات ۱۱ و ۱۲، مشاهده می‌شود که متغیرهای $f, f', f'', f''', g, g', g''$ مجهولات ما را تشکیل می‌دهند. بنابراین، در کنار معادلات مومنتم و انرژی لازم است تا ۵ معادله کمکی تعریف شوند تا سیستم معادلات بسته شوند. معادلات کمکی با نوشتن بسط سری تیلور برای کمیت‌های f, f', f'', g و g' به صورت زیر ایجاد می‌شوند:

$$-f_{j+1} + f_j + f'_j \delta\eta + f''_j \frac{\delta\eta^2}{2} + f'''_j \frac{\delta\eta^3}{8} + f''''_j \frac{\delta\eta^4}{24} = 0 \quad (۱۶)$$

$$-f'_{j+1} + f'_j + f''_j \delta\eta + f'''_j \frac{\delta\eta^2}{3} + f''''_j \frac{\delta\eta^3}{6} = 0 \quad (۱۷)$$

$$-f''_{j+1} + f''_j + f'''_j \frac{\delta\eta}{2} + f''''_j \frac{\delta\eta}{2} = 0 \quad (۱۸)$$

$$-g_{j+1} + g_j + g'_j \delta\eta + g''_j \frac{\delta\eta^2}{3} + g'''_j \frac{\delta\eta^3}{6} = 0 \quad (۱۹)$$

$$-g'_{j+1} + g'_j + g''_j \frac{\delta\eta}{2} + g'''_j \frac{\delta\eta}{2} = 0 \quad (۲۰)$$

قبل از تحلیل دسته معادلات حاصل، ابتدا، لازم است که معادلات غیرخطی ۱۱ و ۱۲ خطی‌سازی شوند. در این تحقیق از روش نیوتن-رافسون برای خطی‌سازی این معادلات استفاده شده است. بعد از انجام خطی‌سازی‌ها معادلات حاصل در هر مقطع ξ به صورت کاملاً ضمنی تحلیل شده و اثرات مربوط به مقاطع قبلی به صورت صریح در نظر گرفته می‌شود. از آنجاکه برای به دست آوردن متغیرهای جریان در هر نقطه z تنها به اطلاعات نقاط $z+1$ و $z-1$ نیاز است، ماتریس ضرایب حاصل شکل بلوکی سه قطری به خود می‌گیرد که هر بلوک آن شامل یک ماتریس 7×7 است. بدین ترتیب، الگوریتم حل در مکان شکل پیش‌رونده خواهد داشت.

در حل معادلات لایه‌مرزی با توجه به ماهیت غیرتشابهی معادلات مورد استفاده، لازم است که یک حل اولیه برای مقطع اول ($\xi = 0$) وجود داشته باشد. در مسائل عملی تلاش می‌شود که نقطه آغاز محاسبات جایی قرار داشته باشد که بتوان برای آن یک حل تشابهی به دست آورد. این نقطه اغلب روی ناحیه سکون قرار داشته و از حل هیمنز^۶ به عنوان مقدار اولیه برای شروع محاسبات استفاده می‌شود. همچنین، با توجه به تغییرات کمی که پروفیل‌های مربوط به کمیت‌های $f, f', f'', f''', g, g', g''$ از یک مقطع تا مقطع مجاور می‌کنند، برای حل جریان در هر مقطع از حل مقطع قبلی به عنوان حدس اولیه استفاده می‌شود. این موضوع سبب می‌شود که همگرایی حل سریع‌تر رخ داده و سرعت محاسبات افزایش یابد. شبکه مورد استفاده نیز اغلب شامل ۷ تا ۱۰ نقطه بوده و تراکم نقاط به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شیب پروفیل‌های سرعت و دما که مشخص‌کننده ضریب اصطکاک سطحی و شار حرارتی هستند با دقت بالایی محاسبه شوند.

$$\begin{aligned} & [Nf'' + f'((1+d_0)f_i + d_1f_{i-1} + d_2f_{i-2})]_{j-1}^j \\ & + \beta \left[\left(\frac{\rho_e}{\rho_j} + \frac{\rho_e}{\rho_{j-1}} \right) \frac{\delta\eta}{2} + \left(\frac{\rho_e \rho'_j}{\rho_j^2} + \frac{\rho_e \rho'_{j-1}}{\rho_{j-1}^2} \right) \frac{\delta\eta^2}{12} \right] \\ & = (1 + \beta + 2d_0) [f'_j XP_1 + f''_j XP_2 + f'''_j XP_3 + f''''_{j-1} XP_4] \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{N}{Pr} g' \right) + \frac{u_e^2}{H_e} \left(N \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) f' f'' \right) \right]_{j-1}^j \\ & + [g((1+d_0)f_i + d_1f_{i-1} + d_2f_{i-2})]_{j-1}^j \\ & = (1 + 2d_0) [f'_j XP_1 + f''_j XP_2 + f'''_j XP_3 + f''''_{j-1} XP_4]_{p_j=g_j} \\ & + [f'_j ZP_1 + f''_j ZP_2 + f'''_j ZP_3 + f''''_{j-1} ZP_4]_{p_j=g_j} \\ & + [g_j ZP_1 + g'_j ZP_2 + g''_j ZP_3 + g'''_{j-1} ZP_4]_{p_j=f'_j} \end{aligned} \quad (۱۲)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای متراکم کردن معادلات گسسته حاصل از انتگرال‌گیری‌ها از متغیرهای کمکی بسیاری استفاده شده است. در ادامه تعاریف مربوط به تک‌تک عبارات‌های کمکی به کار رفته ارائه می‌شود. ابتدا برای عبارت XP داریم:

$$\begin{aligned} XP_1 &= \delta\eta \left(P_j - P'_j \frac{\delta\eta}{2} + P''_j \frac{\delta\eta^2}{8} + P'''_j \frac{\delta\eta^3}{24} \right) \\ XP_2 &= -\delta\eta^2 \left(\frac{P_j}{2} - P'_j \frac{\delta\eta}{3} + P''_j \frac{11\delta\eta^2}{120} + P'''_j \frac{\delta\eta^3}{30} \right) \\ XP_3 &= \delta\eta^3 \left(\frac{P_j}{8} - P'_j \frac{\delta\eta}{120} + P''_j \frac{11\delta\eta^2}{420} + P'''_j \frac{5\delta\eta^3}{504} \right) \\ XP_4 &= \delta\eta^3 \left(\frac{P_j}{24} - P'_j \frac{\delta\eta}{30} + P''_j \frac{5\delta\eta^2}{504} + P'''_j \frac{\delta\eta^3}{252} \right) \end{aligned} \quad (۱۳)$$

توجه شود که متغیر P در معادله مومنتم (رابطه ۱۱) برابر f' بوده و مقدار آن در معادله انرژی (رابطه ۱۲) برابر g است. در رابطه با عبارت ZP نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ZP_1 &= \delta\eta \left(YP_1 - YP'_2 \frac{\delta\eta}{2} + YP_3 \frac{\delta\eta^2}{8} + YP_4 \frac{\delta\eta^3}{24} \right) \\ ZP_2 &= -\delta\eta^2 \left(\frac{YP_1}{2} - YP_2 \frac{\delta\eta}{3} + YP_3 \frac{11\delta\eta^2}{120} + YP_4 \frac{\delta\eta^3}{30} \right) \\ ZP_3 &= \delta\eta^3 \left(\frac{YP_1}{8} - YP_2 \frac{\delta\eta}{120} + YP_3 \frac{11\delta\eta^2}{420} + YP_4 \frac{5\delta\eta^3}{504} \right) \\ ZP_4 &= \delta\eta^3 \left(\frac{YP_1}{24} - YP_2 \frac{\delta\eta}{30} + YP_3 \frac{5\delta\eta^2}{504} + YP_4 \frac{\delta\eta^3}{252} \right) \end{aligned} \quad (۱۴)$$

که در آنها YP به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} YP_1 &= d_1 P_{i-1}^j + d_2 P_{i-2}^j \\ YP_2 &= d_1 P'_{i-1}^j + d_2 P'_{i-2}^j \\ YP_3 &= d_1 P''_{i-1}^j + d_2 P''_{i-2}^j \\ YP_4 &= d_1 P'''_{i-1}^j + d_2 P'''_{i-2}^j \end{aligned} \quad (۱۵)$$

ضرایب d_0, d_1 و d_2 نیز بسته به اینکه از تقریب دو نقطه‌ای یا سه نقطه‌ای در جهت ξ استفاده شود، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \text{برای تقریب دو نقطه‌ای:} \\ & d_0 = \frac{2}{\Delta_{i-1}^2} \quad d_1 = -\frac{2}{\Delta_{i-1}} \quad d_2 = 0 \\ & \text{برای تقریب سه نقطه‌ای:} \\ & d_0 = 2 \frac{\Delta_{i-1}^2 + \Delta_{i-2}^2}{\Delta_{i-1}^2 \Delta_{i-2}^2} \quad d_1 = -2 \frac{\Delta_{i-2}}{\Delta_{i-1} \Delta_{i-2}} \quad d_2 = 2 \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2} \Delta_{i-1}} \end{aligned}$$

$$Re_{\theta l} = \frac{0.664 \left(\int_0^{\xi} \rho^* \mu^* u_e h_{\beta} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_e u_e h_{\beta}} \quad (25)$$

رابطه ۲۱ برای ناحیه سکون صادق نبوده و دارای خطای بالایی است بنابراین در این تحقیق نرخ انتقال حرارت در ناحیه سکون با استفاده از رابطه ۲۶ به دست می آید [۱۱]:

$$q_w = 0.76 Pr^{-0.6} (\rho_e u_e)^{0.4} (\rho_w u_w)^{0.1} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx} \right)_s} (h_{aw} - h_w) \quad (26)$$

این رابطه توسط فای و ریدل برای حالت گاز کامل و بدون واکنش شیمیایی پیشنهاد شده است [۱۴]. در رابطه ۲۶ مقدار گرادیان سرعت در نقطه سکون از رابطه ۲۷ تعیین می شود [۱۴]:

$$\left(\frac{du_e}{dx} \right)_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2(P_e - P_{\infty})}{\rho_{\infty}}} \quad (27)$$

که در آن R همان شعاع انحنا دماغه است.

حل غیرلزج

برای هر دو حلگر توسعه یافته به روش لایه مرزی و تقریب مهندسی در تحقیق حاضر، تعیین مقادیر اندازه سرعت، فشار و دمای استاتیکی روی لبه لایه مرزی حاصل از حل غیرلزج جریان به عنوان ورودی ضروری است. در تحقیق حاضر، از نرم افزار تجاری فلونتت برای حل غیرلزج میدان جریان اطراف جسم مورد مطالعه استفاده شده است. در ادامه توضیحات مربوط به تنظیمات صورت گرفته در نرم افزار مذکور بیان می شود.

شبکه مورد استفاده به صورت باسازمان بوده و استقلال حل از شبکه محاسباتی روی نمودار متغیرهای خروجی در تمامی مسئله های فصل بعد صورت گرفته است. برای حل میدان جریان نیز از حلگر چگالی مینا بر پایه روش گسسته سازی Roe به صورت ضمنی استفاده شده است. دقت شبیه سازی های مکانی از مرتبه دو (روش بالادست مرتبه دو) بوده و از معادله حالت گاز ایده آل برای برقراری ارتباط بین میدان انرژی و مومنتم استفاده شده است. علاوه بر این، ظرفیت گرمایی در فشار ثابت برای هوا ثابت فرض شده است. به منظور اطمینان از همگرایی نتایج نیز علاوه بر کمتر بودن باقیمانده ها از معیار 10^{-5} ، انتگرال پارامترهای مورد استفاده در لبه لایه مرزی نیز، از تکرار مستقل شده است.

نتایج

به منظور بررسی صحت و عملکرد الگوریتم ماتریس انتگرالی در تحلیل معادلات متقارن محوری لایه مرزی و روابط تقریبی

روابط تقریب مهندسی

استفاده از روابط تقریب مهندسی گرمایش آیرودینامیکی یکی از روش های انعطاف پذیر و سریع در طراحی وسایل بازگشتی در سرعت های ماورای صوت است. در این راستا روابط تقریبی مختلفی ارائه شده که در این بخش برای محاسبه گرمایش آیرودینامیکی از معادلات انتگرالی زوبی استفاده شده است. این روابط برای جریان آرام و آشفتنه توسعه داده شده که در این مقاله از روابط جریان آرام استفاده می شود.

اساس رابطه زوبی در تعیین شار حرارتی با استفاده از تعریف عدد استانتون به صورت رابطه ۲۱ است [۱۱]:

$$q_w = St \rho_e u_e (h_{aw} - h_w) \quad (21)$$

با استفاده از رابطه اصلاح شده آنالوژی رینولدز عدد استانتون را می توان توسط رابطه ۲۲ به ضریب اصطکاک مرتبط کرد [۱۱]:

$$St = \frac{C_f}{2} (Pr)^{-k} \quad (22)$$

در رابطه ۲۲، Pr عدد پراتل و پارامتر k، عددی ثابت است که برای جریان آرام $0/6$ و برای جریان مغشوش $0/4$ است. مقدار C_f نیز ضریب اصطکاک بوده که می توان آن را از حل دقیق معادله بلازیوس و تعیین ضخامت مومنتوم لایه مرزی محاسبه کرد. در رابطه ۲۱ h_{aw} آنتالپی دیواره عایق است که از رابطه ۲۳ محاسبه می شود:

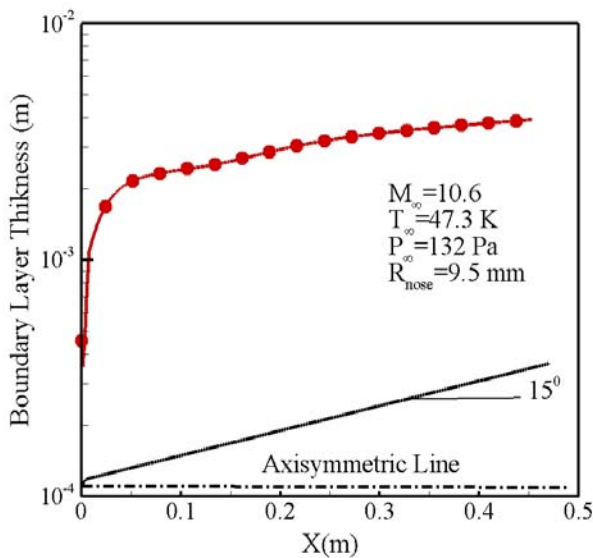
$$h_{aw} = h_e + \frac{1}{2} Ru_e^2 \quad (23)$$

که در این رابطه R ضریب بازیافت بوده و برای جریان آرام $R = pr^{\frac{1}{2}}$ انتخاب می شود. با تعریف ضخامت مومنتوم و ساده سازی در نهایت نرخ شار حرارتی وارد به سطح از رابطه ۲۴ تعیین می شود [۱۱]:

$$q_{wl} = C_1 (Re_{\theta l})^{-m} \left(\frac{\rho^*}{\rho_e} \right)^m \left(\frac{\mu^*}{\mu_e} \right)^m \rho_e u_e (h_{aw} - h_w) (Pr)^{-k} \quad (24)$$

این رابطه برای جریان آرام و آشفتنه صادق بوده و تنها ضرایب آن متفاوت است. در این رابطه برای در نظر گرفتن اثر تراکم پذیری از تعریف آنتالپی مرجع [۱۳] استفاده شده است تا بتوان از روابط و متغیرهای جریان تراکم پذیر برای جریان تراکم پذیر استفاده کرد. ثابت های مربوط به محاسبه نرخ شار حرارتی جریان آرام برابر $C_1 = 0.22$ ، $K = 0.6$ و $m = 1$ انتخاب می شوند. همچنین عدد رینولدز بر مبنای ضخامت مومنتوم لایه مرزی در جریان آرام توسط رابطه ۲۵ محاسبه می شود:

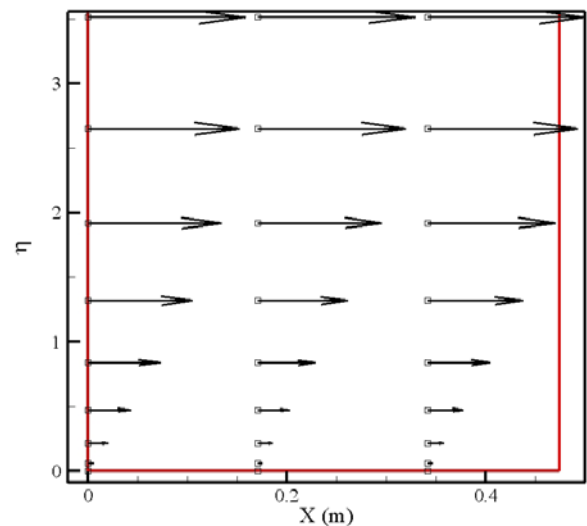
روی سطح جسم تأمین می‌شود، از ضخامت لایه مرزی صرف نظر می‌شود. در واقع برای تعیین دقیق مقادیر روی لبه لایه مرزی، جسمی که حل غیرلزج روی آن صورت می‌گیرد می‌بایست به مقدار ضخامت لایه مرزی، ضخیم‌تر شود تا شرایط مرزی روی لبه لایه مرزی معادلات دقیق‌تر شده و حل دقیق‌تری از معادلات لایه مرزی فراهم شود. با توجه به اینکه ضخامت لایه مرزی نسبت به ابعاد جسم بسیار کوچک است، در نظر نگرفتن آن خطای زیادی در محاسبات ایجاد نمی‌کند اما اطلاع از میزان ضخامت لایه مرزی میزان دقت نتایج به دست آمده را روشن کند. شکل (۲) توزیع ضخامت لایه مرزی روی سطح مخروط ۱۵ درجه را نشان می‌دهد که بیانگر رشد آن در راستای طول بدنه است. مشاهده می‌شود که حداکثر ضخامت لایه مرزی در انتهای بدنه حدود ۳ میلی‌متر بوده که در مقابل طول و شعاع نوک جسم ناچیز است.



شکل ۲- ضخامت لایه مرزی روی سطح بدنه مخروط ۱۵ درجه

به منظور بررسی گرمایش آیرودینامیکی روی سطح مخروط فوق مقایسه توزیع شار حرارتی به روش تقریب مهندسی و روش حل معادلات لایه مرزی با داده‌های تجربی [۱۶] در شکل (۳) آورده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که اینک در نواحی نزدیک به نقطه سکون اختلافاتی بین دو روش وجود دارد، اما نتایج حاصل از هر دو روش تطابق خوبی با داده‌های تجربی دارند. با توجه در این نمودار مشخص است که به استثنای نتایج مربوط به حل کامل معادلات ناویر-استوکس، سایر روش‌های استفاده شده شار حرارتی را در انتهای مدل کمتر از داده‌های تجربی محاسبه می‌کنند. دلیل این اختلاف ناشی از در نظر نگرفتن ضخامت جابه‌جایی و عدم اعمال اثرات مرتبط با لایه آنتروپی در روش‌های مورد استفاده است. اگرچه، اثرات لایه آنتروپی

گرمایش آیرودینامیکی، نتایج حاصل از اعمال الگوریتم‌های حاضر روی چند مسئله نمونه با داده‌های موجود در مراجع معتبر مقایسه شده‌اند. مسئله اول، بررسی گرمایش حول یک هندسه مخروط سرخ با زاویه ۱۵ درجه در عدد ماخ ۱۰/۶ است که طولی معادل با ۰/۴۵ متر و دمای دیواره ثابت معادل ۳۰۰ کلوین دارد. سایر شرایط جریان در شکل‌ها آورده شده‌اند. در حل معادلات لایه مرزی که نیاز به تولید شبکه محاسباتی وجود دارد؛ بیشترین مقدار η و اولین فاصله شبکه از دیواره، دو پارامتر اساسی در تعیین پایداری حل عددی و میزان دقت حل هستند. در مرجع [۱۵] حساسیت روش ماتریس انتگرالی به تعداد نقاط شبکه در راستای عمود بر جریان بررسی و نتیجه گرفته شده است که با تعداد حداقل ۹ نقطه درون لایه مرزی در هر گام می‌توان نتایج قابل قبولی در گرمایش آیرودینامیکی به دست آورد. در واقع استفاده از الگوریتم ماتریس انتگرالی در حل معادلات لایه مرزی سبب شده است که با تراکم کم نقاط بتوان نتایج مناسبی را فراهم کرد. شکل (۱) پروفیل سرعت به همراه تعداد نقاط درون لایه مرزی در شبکه محاسباتی را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که تعداد شبکه در راستای جریان ۵۰۰ گام مکانی است. همان‌طور که بیان شد تخمین گرمایش آیرودینامیکی به روش تقریب مهندسی نیازی به تولید شبکه ندارد و روابط در هر گره محاسباتی روی سطح قابل استفاده است.



شکل ۱- پروفیل سرعت روی شبکه محاسباتی کره مخروط ۱۵ درجه

یکی از مزیت‌های حل معادلات لایه مرزی تعیین ضخامت و نحوه رشد لایه مرزی است. از آنجاکه جهت حل معادلات لایه مرزی، دما، فشار و سرعت روی لبه لایه مرزی به عنوان شرط مرزی مورد نیاز است و این مقادیر از تحلیل جریان غیرلزج هندسه مورد نظر و با استفاده از داده‌های

حاصل کند استفاده شده است (شکل ۳). در شکل (۴) شبکه بندی صورت گرفته برای حل فوق آورده شده است. شبکه ایجاد شده برای این حل دارای تعداد ۱۸۰۰۰ المان است. به دلیل اهمیت فوق العاده فاصله نقطه اول شبکه در محاسبات مربوط به گرمایش، از نتایج کد لایه مرزی و محاسبه ضخامت لایه مرزی استفاده شده و مناسب ترین شبکه برای حل لزج نرم افزار فلونتت ایجاد شده است. در این شبکه، فاصله اولین نقطه از سطح معادل ۰/۱ ضخامت لایه مرزی هیمنز بوده و از ۸۰ نقطه محاسباتی در راستای عمودی استفاده شده است. شایان ذکر است که شبکه تولید شده برای فراهم کردن نقاط کافی در لایه مرزی به سمت دیواره متراکم شده است. به منظور ارزیابی الگوریتم های توسعه یافته، در جدول (۳) مقایسه زمان محاسباتی با استفاده از نرم افزار فلونتت و الگوریتم های حاضر با استفاده از یک رایانه با مشخصات Core-i5-2400, CPU 3.1GHz, RAM 4GB برای این مسئله صورت گرفته است.

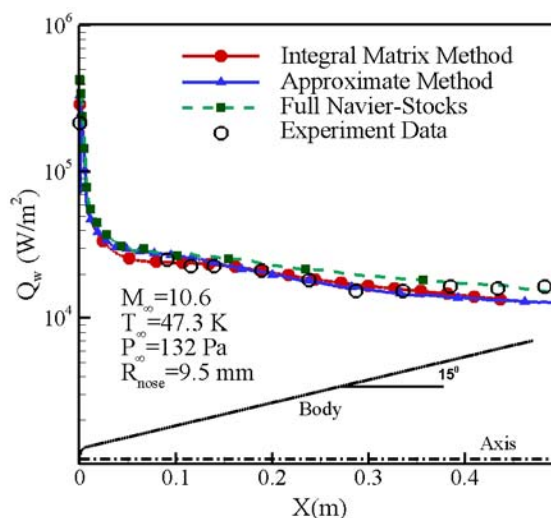
جدول ۳- مقایسه زمان محاسباتی

ردیف	نرم افزار/روش	معادلات	زمان (دقیقه)
۱	فلونتت	معادلات ناویر- استوکس	۴۵
۲	فلونتت	معادلات اوپلر	۱۰
۳	لایه مرزی	لایه مرزی	۰/۲۵
۴	تقریبی	تقریبی	۰/۱۵

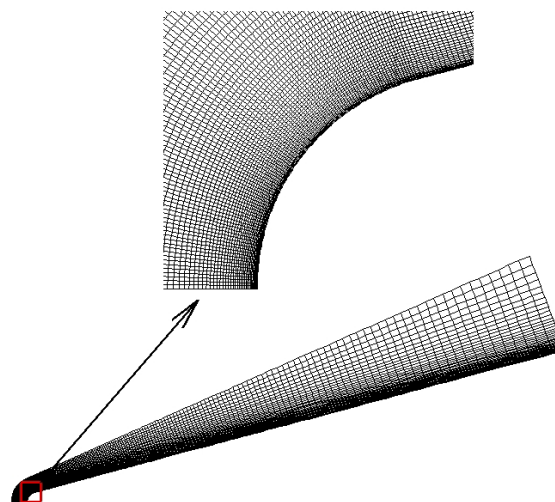
مشاهده می شود که زمان محاسباتی برای این مسئله با استفاده از نرم افزار فلونتت تقریباً ۴۵ دقیقه و با استفاده از حل معادلات لایه مرزی حدود ۰/۲۵ دقیقه و برای روش تقریبی معادل ۰/۱۵ دقیقه است. بنابراین، زمان محاسباتی برای دو روش حاضر به همراه حل غیرلزج آنها حدود ۱۰ دقیقه می شود. با توجه به مقایسه هزینه های محاسباتی و این حقیقت که اختلاف زمان محاسباتی در مسائل سه بعدی به مراتب تشدید می شود، می توان به اهمیت توسعه الگوریتم های فوق پی برد.

به منظور ارزیابی نتایج الگوریتم حاضر در تحلیل هندسه هایی با طول بیشتر، تحلیل جریان ماورای صوت حول یک مخروط سریع با زاویه ۵ درجه با طولی معادل ۴۷ متر مورد بررسی قرار گرفته است. جریان آزاد دارای عدد ماخ ۱۵ بوده و دمای سطح جسم ۱۲۵۵ درجه کلوین است. شار حرارتی روی سطح جسم با استفاده از دو روش حل معادلات لایه مرزی و روابط تقریبی در شکل (۵) با نتایج عددی مرجع [۱۷] که با روش عددی لایه شوک لزج (VSL) است، مقایسه شده است. مشاهده می شود که نتایج هر دو روش برهم منطبق بوده و روند مناسبی دارند. بررسی حاضر نشان می دهد که استفاده از روابط تقریبی در تخمین گرمایش آیرودینامیکی حول

غالباً مربوط به نواحی نزدیک به شوک کمانی یعنی در نزدیکی دماغه مشهود هستند، اما خطایی که در نظر گرفتن آن ایجاد می کند با توجه به نتایج موجود در تحقیق حاضر و مرجع [۱۶] تا پایین دست جریان امتداد می یابد. در نظر گرفتن تناوبی ضخامت جابه جایی در حل غیرلزج و اصلاح شرایط روی لبه لایه مرزی در حل معادلات لایه مرزی می تواند به اصلاح نتایج به خصوص در نواحی دور از دماغه که ضخامت لایه مرزی رشد می کند کمک کند [۱۶].



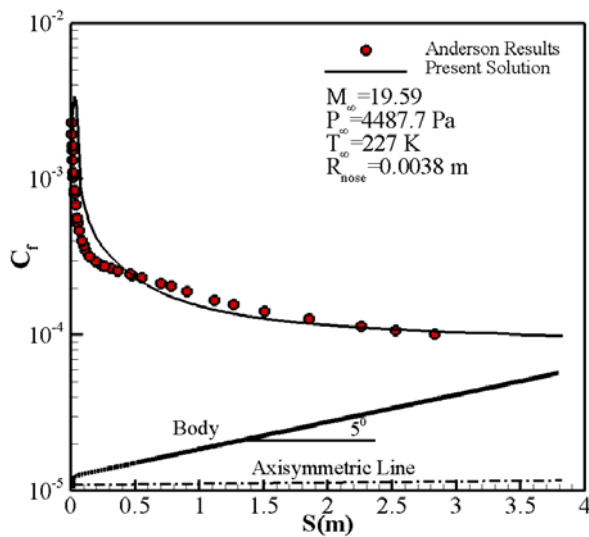
شکل ۳- مقایسه توزیع شار حرارتی روی سطح بدنه کره مخروط ۱۵ درجه



شکل ۴- شبکه محاسباتی برای حل لزج فلونتت

به منظور بررسی راندمان الگوریتم های حاضر نتایج حاصل با حل لزج نرم افزار فلونتت مقایسه شده اند. شبکه مورد استفاده برای این حل بعد از انجام مطالعات مربوط به استقلال حل از شبکه محاسباتی انتخاب شده است. بنابراین، جهت انجام محاسبات از کمترین نقاط شبکه که توزیع شار حرارتی صحیحی روی دیواره

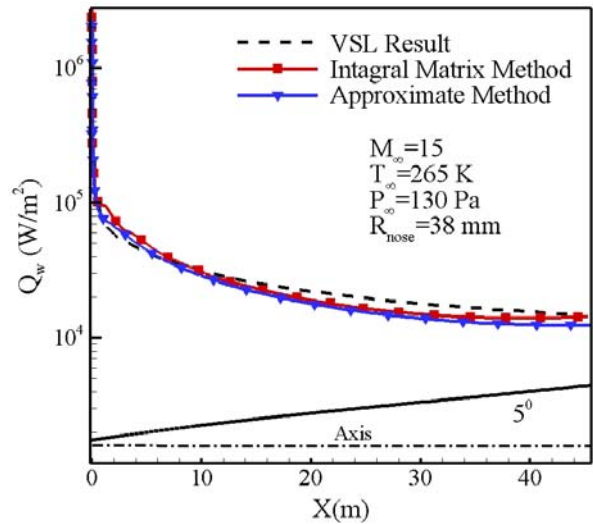
برای مطالعه دقیق تر عملکرد کد توسعه داده شده در محاسبه ضریب اصطکاک پوسته‌ای جریان ماورای صوت اطراف کره مخروط با ماخ $19/6$ و زاویه جانبی 5° مورد ارزیابی قرار گرفته است. شعاع دماغه در این مسئله برابر $0/038$ متر بوده و دمای دیواره 555 درجه کلوین است [۱۸]. فشار و دمای جریان آزاد نیز به ترتیب برابر 4488 پاسکال و 227 درجه کلوین در نظر گرفته شده است. در این رابطه شکل (۷) توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای حاصل از الگوریتم مورد استفاده را در مقایسه با نتایج اندرسن [۱۸] نمایش می‌دهد که تطابق خوبی دارد.



شکل ۷- مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح

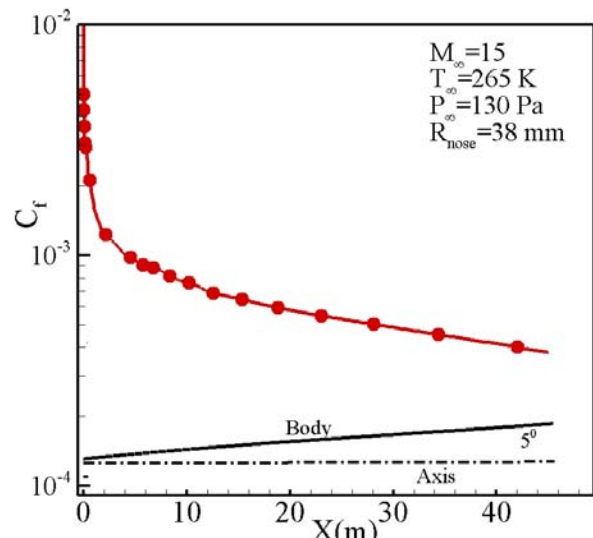
به منظور بررسی قابلیت الگوریتم‌های حاضر در تحلیل هندسه‌های پیچیده تر و با زوایای هندسی بالاتر، مسئله دیگری که مورد تحلیل قرار گرفته مدلی از کپسول مریخ پیمای بازگشتی در مأموریت ناسا با دماغه سرپخ و زاویه شیب 70° درجه است. اینکه معادلات لایه مرزی و روابط تقریبی پس از جدایش جریان از روی سطح حاکم بر رفتار سیال نیستند، لذا تنها قسمت جلو دماغه که تقریباً مهم ترین ناحیه جسم از لحاظ بررسی گرمایش آیرودینامیکی است توسط نرم افزار حاضر مدل سازی شده است. در تحلیل‌ها دمای دیواره ثابت و برابر با 300 کلوین در نظر گرفته شده است. مقایسه توزیع شار حرارتی روی سطح بدنه حاصل از دو روش تقریبی و حل معادلات لایه مرزی با داده‌های تجربی [۱۹] در شکل (۹) نشان داده شده است. در این مسئله نیز مشابه با مسائل قبلی، شبکه به کار رفته برای حل معادلات لایه مرزی دارای 9 گره در عرض لایه مرزی است. مشاهده می‌شود که حل

اجسام متقارن محوری در جریان ماورای صوت در فاصله‌های زیاد از نوک جسم قابل اعتماد است.

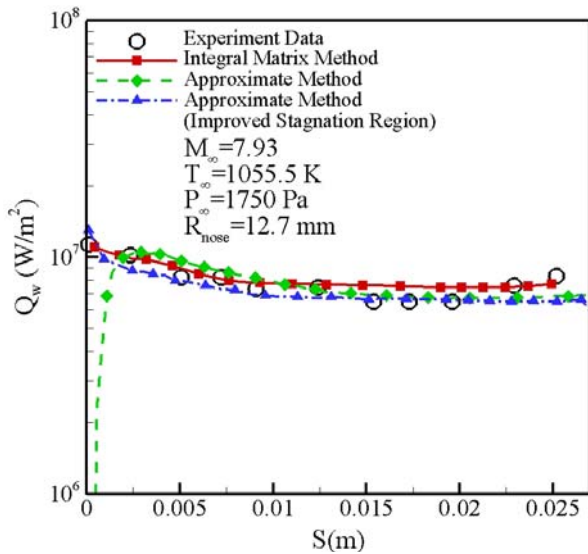


شکل ۵- مقایسه توزیع شار حرارتی روی سطح بدنه کره مخروط با زاویه 5°

یکی از پارامترهایی که در طراحی اجسام پرنده در سرعت‌های ماورای صوت بسیار حائز اهمیت است، مقدار و نحوه توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح جسم است. از آنجاکه استفاده از روابط تقریبی 21 و 26 تنها برای محاسبه شار حرارتی روی سطح اجسام بازگشتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، در شکل (۶) توزیع این پارامتر روی سطح هندسه مخروط سرپخ حاصل از حل معادلات لایه مرزی آورده شده است. صحت نتایج مربوط به شارحرارتی با توجه به ارتباطی که از طریق آنالوژی رینولدز بین عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای وجود دارد، به نحوی صحت نتایج مربوط به C_f را نیز به اثبات می‌رساند.

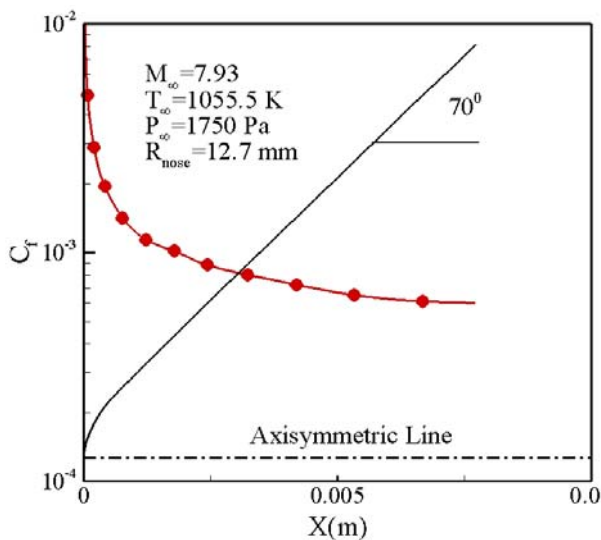


شکل ۶- مقایسه ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح بدنه کره مخروط با زاویه 5° درجه



شکل ۹- مقایسه توزیع شار حرارتی روی سطح بدنه کپسول

در شکل (۱۰) ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح جسم حاصل از حل معادلات لایه مرزی آورده شده است. همان‌طور که بیان شد نتایج به دست آمده برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح جسم به دلیل انطباق خوب شارحرارتی به دست آمده روی جسم با داده‌های تجربی و ارتباط بین عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای از طریق آنالوژی رینولدز قابل اعتماد است.

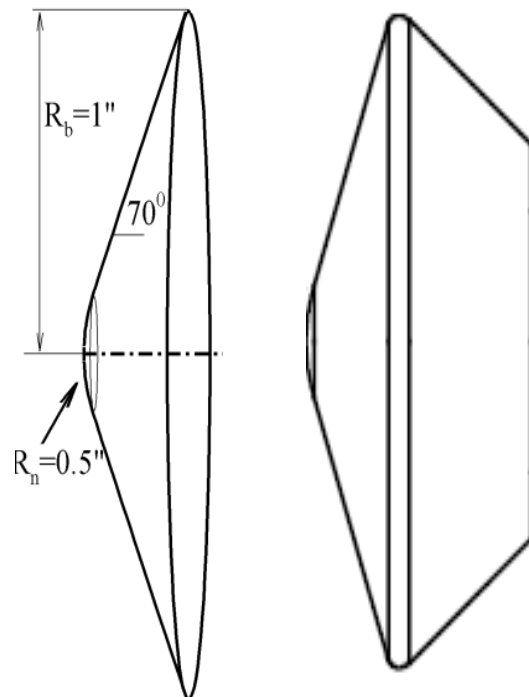


شکل ۱۰- مقایسه توزیع ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی سطح بدنه کپسول

نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، گرمایش آیرودینامیکی جریان حول اجسام ماورای صوت متقارن محوری به دو روش حل عددی معادلات

معادلات لایه مرزی و استفاده از الگوریتم ماتریس انتگرالی تنها با ۹ نقطه در شبکه محاسباتی نتایج مناسبی را فراهم می‌کند. شایان ذکر است که حل معادلات لایه مرزی شدیداً وابسته به شرایط مرزی روی لبه لایه مرزی است که از حل غیرلزج جریان فراهم می‌شود. از آنجاکه هندسه کپسول در این مسئله دارای ناحیه سکون بزرگی است، فراهم کردن نتایج غیرلزج دقیق و هموار در این ناحیه با استفاده از حلگرهای غیرلزج دشوار بوده و هر خطایی در آنها باعث بروز خطا در نتایج حل معادلات لایه مرزی می‌شود. همان‌طور که بیان شد رابطه ۲۱ در تخمین شار حرارتی در ناحیه سکون قابل استفاده نیست. این مسئله به وضوح در شکل (۹) مشاهده می‌شود. در واقع روابط تقریب مهندسی زویبی با فرض نازک بودن لایه شوک به دست آمده است که در هندسه فوق ضخامت لایه شوک با افزایش زاویه هندسی، بیشتر شده و باعث ایجاد خطا در نتایج می‌شود. از این رو برای اصلاح نتایج در این ناحیه از رابطه ۲۶ استفاده شده که مخصوص ناحیه سکون توسعه داده شده است و مشاهده می‌شود که با استفاده از این رابطه در نقطه سکون نتایج تطابق مناسبی با داده‌های تجربی پیدا می‌کنند. نکته حائز اهمیت سرعت تحلیلگر حاضر چه به روش حل معادلات لایه مرزی و چه به روش تقریبی است که این مسئله در هندسه‌های سه بعدی بیشتر مشهود است.



شکل ۸- هندسه کپسول کره- مخروط با زاویه ۷۰ درجه

- Flat Plate,” *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 32, Issue 4, 2004, pp. 316-344.
- [6] Dejarnette, F. R., Hamilton, A. H., Weilmuenster K. J. and Cheatwood F. M., “A Review of Some Approximate Methods Used in Aerodynamic Heating Analysis,” *Journal of Thermo physics*, Vol. 1, No. 1 1978, pp. 5-12.
- [7] Dejarnette, F. R. and Hamilton, H. H., “Inviscid Surface Streamlines and Heat Transfer on Shuttle-Type Configurations,” *Journal of Spacecraft*, Vol. 10, No. 5 , 1973, pp.314-321.
- [8] Riley, C. J. and Dearnette, F. R., “Engineering Aerodynamic Heating Method for Hypersonic Flow,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 29, No. 3, 1992, pp.327-339.
- [9] Shimshi, J. P. and Walberg, G. D., “Aerodynamic Heating to Spherically Blunted Cones at Angle of Attack,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 32, No 33, 1995, pp. 559-561.
- [10] Carlson, H. A., “Aerothermodynamics Analyses of Hypersonic Blunt Body Flows,” *Journal of Spacecraft and Rocket*, Vol. 36, No. 6, 1999, pp. 912-915.
- [11] Zoby, E. V., Moss, J. N. and Sutton, K., “Approximate Convecting Heating Equations for Hypersonic Flows,” *Journal of Spacecraft*, Vol.18, No.1, 1981, pp 64-70.
- [12] Anderson, J. D. *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, NewYork: McGraw-Hill Book Company, 1989.
- [13] Eckert, E. R. G., “Engineering Relations for Friction and Heat Transfer to Surfaces in High Velocity Flow,” *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 22, No .8, 1955, pp. 585-587.
- [14] Fay, J. A. and Riddle, F. R., “Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air,” *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 25, No.2, 1958, pp. 73-85.
- [15] Kamali Moghadam, R. and Salimi, M. R. “Hypersonic Flow Solution around the Axisymmetric Reentry Vehicles Using Laminar Boundary Layer Equations by Integral Matrix Method,” *the first Aero-Hydro Conference*, Iran, 2012 (In Persian).
- [16] Cleary, J. W., “Effects of Angle of Attack and Bluntness on Laminar Heating- Rate Distributions of Angle 15 Cone at a Mach Number of 10.6,” NASA Technical Note, TN D-5450, October 1969.
- [17] Cheatwood, F. and Dejarnet, F. R., “Approximate Viscous Shock Layer Technique for Calculating Hypersonic Flows about Blunt-Nosed Bodies,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 31, No. 4, 1994, pp. 621-629.
- [18] Anderson, E. C., Lewis, H., “Laminar or Turbulent Boundary-Layer Flows of Perfect Gases or Reacting Gas Mixtures in Chemical Equilibrium,” NASA CR-1893, 1971.
- [19] Hollis, B. R. and Perkins J. N., “Comparison of Experimental and Computational Aerothermodynamics of a 70-deg Sphere-Cone”, AIAA 96-1867, 1996.

لایه‌مرزی آرام و روش تقریب مهندسی مورد بررسی قرار گرفته است. استفاده از روش ماتریس انتگرالی در حل معادلات لایه‌مرزی سبب می‌شود که با تراکم کم تعداد شبکه در عرض لایه‌مرزی جریان بتوان نتایج مناسبی را فراهم کرد که این مسئله هزینه محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد. به منظور اعتباردهی الگوریتم‌های توسعه‌یافته، جریان ماورای صوت حول سه هندسه مخروط سرخ با زوایای هندسی متفاوت و در شرایط مختلف مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که روش‌های به‌کار رفته دارای دقت مناسب در تحلیل گرمایش آیرودینامیکی اجسام متقارن محوری بوده و دارای سرعت بالا در راستای طراحی آیرودینامیکی اجسام بازگشتی هستند. استفاده از الگوریتم ماتریس انتگرالی در حل معادلات لایه‌مرزی باعث شده که بتوان با تعداد نقاط کمتری در عرض لایه‌مرزی نسبت به سایر روش‌های عددی نتایج را استخراج کرد که این موضوع سرعت حلگر لایه‌مرزی را به شدت افزایش می‌دهد. همچنین انعطاف‌پذیری بالای روش تقریب مهندسی در تخمین گرمایش آیرودینامیکی اجسام بازگشتی به دلیل عدم استفاده آنها از حل عددی، این حلگر را برای طراحی مناسب می‌سازد. البته استفاده از رابطه تقریب مهندسی زوبی در ناحیه سکون محدودیت پیدا کرده و تخمین شار حرارتی را دچار خطا می‌کند که این موضوع با استفاده از رابطه تقریبی فای-ریدل که برای نقطه سکون توسعه داده شده قابل حل است.

مراجع

- [1] Bartlett, E. P. and Kendall, R. M., “Nonsimilar Solution of the Multicomponent Laminar Boundary Layer by an Integral Matrix Method,” NASA CR-1062, Part I, 1967.
- [2] Anderson, L. W. and Kendall, R. M., “A Nonsimilar Solution for Multicomponent Reacting Laminar and Turbulent Boundary Layer Flows Including Transverse Curvature,” AFWL TR-69-106, 1970.
- [3] Hamilton, H. H., Millman, D. R. and Greendyke, R. B., “Finite-Difference Solution for Laminar or Turbulent Boundary Layer Flow over Axisymmetric Bodies with Ideal Gas, CF₄, or Equilibrium Air Chemistry,” NASA CR-3271, 1992.
- [4] Catherall, D. and Mangler, K.W., “The Integration of the Two-Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations Past the Point of Vanishing Skin Friction,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 26, Issue 01, 1966, pp.163-182.
- [5] Lewins, J. D. “Comparative Solutions to the Integral-Approximate Thermal Boundary Layer Equations for a