

Analysis and Improvement of Star Identification Algorithm Based on Singular Value Decomposition for Star Sensor

Mona Zahednamazi¹ , Alireza Toloui^{2*} 

1. Ph.D., Faculty of New Technologies and Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran
2. Associate Professor, Faculty of New Technologies and Aerospace Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

*Corresponding Author's E-mail: toloei@sbu.ac.ir

Abstract

This paper presents analysis and improvements on a star identification algorithm based on singular value decomposition. To improve the identification results, modifications have been made to the algorithm. Moreover, analysis and simulation are presented to investigate the effect of field of view dimensions and the number of stars used on the identification results, and the rate of duplicate sets in the database. In addition, identification has been considered a two-step process based on singular values and vectors. The results show the superiority of the improved algorithm in increasing the identification rate and reducing the rate of duplicate sets in the database. The identification rate of the improved algorithm in $10^\circ \times 10^\circ$ and $12^\circ \times 12^\circ$ fields of view dimension is always more than 97%.

Keywords: Star sensor, Star identification, Singular value decomposition, Lost-in-space identification algorithm

1. Introduction

One of the essential requirements in aerospace is attitude determination. The star sensor is one of the most reliable attitude sensors for space applications. The process of determining the attitude by the star sensor includes several steps: image processing, star identification, database searching, and finally attitude calculation. Star identification is an essential step for attitude determination by the star sensor. The identification algorithms in the star sensors are based on properties that do not change with the transformation of coordinate systems. One of the less noticed properties is the invariance of matrix singular values and the right singular vectors under the transformation of coordinate systems. This property is the basis of the star identification algorithm based on singular value decomposition [1]. This paper deals with the analysis and modification of the star identification algorithm based on singular value decomposition. Modifications have been implemented to enhance the algorithm. The influence of the required number of stars and the dimensions of the field of view on the algorithm has been analyzed and investigated to

determine the best number of the stars and best size of the sensor's field of view for this algorithm.

2. Star identification based on singular value decomposition

If the star unit vectors in reference and measurement frames are denoted by \mathbf{v}_i and \mathbf{w}_i , respectively; For N stars in the field of view, the column matrices of these vectors are denoted by $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]$ and $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N]$, respectively [2]. These vectors satisfy the (equation.1).

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}\mathbf{V} \quad (1)$$

In which \mathbf{C} is the direction cosine matrix, where \mathbf{P}_v and \mathbf{P}_w are 3×3 orthogonal matrices corresponding to the left singular vectors. \mathbf{Q}_v and \mathbf{Q}_w are $N \times N$ orthogonal matrices corresponding to right singular vectors, three of which correspond to the singular values of \mathbf{V} and \mathbf{W} .

There are invariant properties for singular values and the right singular vectors in singular value decomposition under any unique coordinate transformation, which



COPYRIGHTS

© 2023 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [the Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

How to cite this article:

M. Zahednamazi and A. Toloui, "Analysis and Improvement of Star Identification Algorithm Based on Singular Value Decomposition for Star Sensor," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 16, No. 4, pp. 57-70, 2023 (in Persian), <https://doi.org/10.30699/jsst.2023.1445>.

makes this method suitable for star identification. These properties are as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_{wi} &= \sigma_{vi} \\ \mathbf{q}_{wi} &= \pm \mathbf{q}_{vi} \\ \mathbf{p}_{wi} &= \pm \mathbf{Cp}_{vi} \quad (i = 1,2,3)\end{aligned}\quad (2)$$

In the original singular value decomposition algorithm, the directional vector of each star is calculated and considered as the direction of the center of the field of view. According to the size of the field of view, the neighboring stars of the primary star are identified. In the next step, four brighter stars are selected among the primary star and its neighboring stars. Finally, the corresponding matrix is made using their directional vector, and singular values and also the right and left singular vectors of this matrix are calculated.

The database is created using these singular values and singular vectors. There are some disadvantages to this method of database building. By selecting 4 brighter stars for each direction, neighboring clusters can have identical stars. The number of these duplicated sets increases significantly in regions of the celestial sphere where there is a high density of stars. In this paper, some changes have been made to improve the identification performance. In the new approach, instead of choosing 4 brighter stars, the primary star is kept, regardless of its magnitude. This significantly reduces the number of duplicate sets in the database. The second one is the change in the dimensions of the field of view. Here, in order to investigate the effect of the field of view on the performance of the star identification algorithm based on singular value decomposition, four different fields of view with the dimensions of $6^\circ \times 6^\circ$, $8^\circ \times 8^\circ$, $10^\circ \times 10^\circ$ and $12^\circ \times 12^\circ$ have been investigated, and the results related to the influence of the field of view size on the identification rate, duplicate sets in the database and the lack of stars have been investigated. The third one is the number of stars required for identification. In general, 3 stars are enough to perform identification operations; because the number of singular values of a matrix is equal to its rank. But since the direction vector for each star is a three-component vector, regardless of the number of stars, there will always be three singular values. In this paper, the effects related to the number of stars are also investigated. The number of stars tested here is 3, 4, and 5 stars.

3. Simulation

The simulations are performed based on stars brighter than magnitude 6.5 in the Hipparchus star catalog. The simulations for the original singular value decomposition algorithm and the improved algorithm have been carried out and their results have been presented. In each of the approaches, the simulations for the number of 3, 4, and 5 stars and the dimensions of the field of view are $6^\circ \times 6^\circ$, $8^\circ \times 8^\circ$, $10^\circ \times 10^\circ$ and $12^\circ \times 12^\circ$, implemented by MATLAB software. A computer with Intel (R) Core™ i7-2670QM 2.20 GHz CPU and 6GB RAM specifications was used to run the algorithms. To evaluate the methods, simulations have been performed for 200 random directions of the star sensor for each of these methods for the different number of stars and the different dimensions of the field of view. In this paper, star identification is considered a two-step process: unique

solutions with ngular values and unique solutions with singular vectors. In the second case, unique answers cannot be obtained only by using singular values, and in addition to them, singular vectors must also be evaluated.

4. Conclusions

In this paper, the analysis and improvement of the star identification algorithm based on singular value decomposition was presented. The improved algorithm is obtained by adding a condition for keeping the primary star, regardless of its magnitude. The presented analyses included the effect of the dimensions of the field of view and the number of stars on the identification rate and the number of duplicate star sets in the database. For this purpose, fields of view with dimensions of $6^\circ \times 6^\circ$, $8^\circ \times 8^\circ$, $10^\circ \times 10^\circ$ and $12^\circ \times 12^\circ$ were examined. Moreover, regardless of the number of stars used for the algorithm, there are always three singular values. Therefore, database construction based on three, four, and five stars was investigated. The average identification rate in the original approach is 42.41% and the average identification rate in the improved approach is 94.08%. Therefore, the improved approach shows more than 50% improvement in identification performance. The identification rate in the improved approach in the field of view $10^\circ \times 10^\circ$ and $12^\circ \times 12^\circ$ is always more than 97%. In the fields of view of $10^\circ \times 10^\circ$ and $12^\circ \times 12^\circ$ for 3, 4, and 5 stars, at magnitude 6.5, there are enough stars in the field of view for identification. The average identification rate of the two approaches and in the different number of stars for the field of view $10^\circ \times 10^\circ$ is 70.33% and for the field of view $12^\circ \times 12^\circ$ is 68.5%. According to the results as well as construction considerations and space environment, $10^\circ \times 10^\circ$ can be considered the most appropriate size for the field of view in the singular value decomposition algorithm. Furthermore, the analysis showed that by using three stars, in some cases, the third singular value becomes very small and the conditional number of the matrix becomes very large. With this value being smaller than the considered error limit, this singular value is practically excluded from the calculations. Therefore, it is better to use more than three stars in this algorithm. According to the obtained results, using five stars in the singular value decomposition algorithm is the more appropriate choice.

5. References

- [1] J.-N. Juang, H.-Y. Kim and J. L. Junkins, "An efficient and robust singular value method for star pattern recognition and attitude determination," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 52, pp. 211-220, 2004, <https://doi.org/10.1007/BF03546429>.
- [2] H. Yin, X. Song and Y. Yan, "Robustness analysis and improvement of singular value decomposition algorithm for autonomous star identification," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol 229, no.10, pp.1757-1770, 2015, <https://doi.org/10.1177/095441001456018>.

تحلیل و بهبود الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین برای حسگر ستاره

منا زاهد نمازی^۱ و علیرضا طلوعی^{۲*}

دانشکده مهندسی فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

* ایمیل نویسنده مخاطب: toloei@sbu.ac.ir

چکیده

یکی از حسگرهای تعیین وضعیت برای فضاییما حسگر ستاره است. محاسبه وضعیت توسط حسگر ستاره شامل چندین گام است: پردازش تصویر، شناسایی ستاره، جستجو در پایگاه داده و پیاده سازی الگوریتم تعیین وضعیت. این مقاله به تحلیل و بهبود الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین می پردازد. به منظور بهبود نتایج شناسایی، اصلاحاتی در الگوریتم انجام شده است. همچنین، تحلیل و شبیه سازی به منظور بررسی تأثیر ابعاد میدان دید و تعداد ستارگان مورد استفاده بر نتایج شناسایی و نرخ مجموعه های تکراری در پایگاه داده ارائه شده است. علاوه بر این، شناسایی به عنوان یک فرآیند دوطرفه ای بر اساس مقادیر و بردارهای تکین در نظر گرفته شده است. نتایج، برتری الگوریتم بهبود یافته در افزایش نرخ شناسایی و کاهش نرخ مجموعه های تکراری در پایگاه داده را نشان می دهد. نرخ شناسایی الگوریتم بهبود یافته در میدان های دید $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ ، همواره بالاتر از ۹۷٪ است. شبیه سازی ها بر اساس کاتالوگ ستاره های هیپارکوس برای ستارگان روشن تر از قدر ۶/۵ و با استفاده از نرم افزار متلب انجام شده است.

واژه های کلیدی: حسگر ستاره، الگوریتم شناسایی ستاره، تجزیه مقدار تکین، الگوریتم شناسایی گم شده در فضا

علائم و اختصارات

α	زاویه بعد
δ	زاویه میل
σ	مقدار تکین
P	ماتریس بردار تکین چپ
Q	ماتریس بردار تکین راست
Σ	ماتریس مقادیر تکین

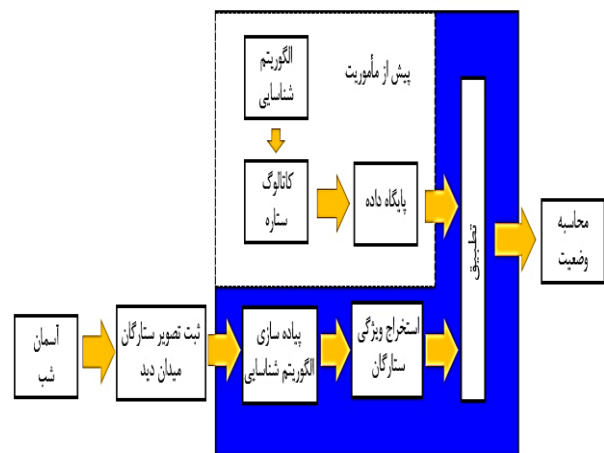
مقدمه

یکی از نیازمندی های ضروری در هوافضا تعیین وضعیت است. تاکنون روش ها و حسگرهای مختلفی برای تعیین وضعیت پیشنهاد

شده است [۱-۳]. حسگر ستاره، یکی از مناسب ترین حسگرهای وضعیت برای کاربردهای فضایی است. عدم نیاز به مقادیر اولیه، کاربردی بودن در نزدیکی زمین و فضای عمیق و دقت بالا (از مرتبه ثانیه قوسی) از مزایای این حسگر محسوب می شود [۴]. استفاده از حسگر ستاره شامل دو بخش است: پیش از مأموریت و در حین مأموریت. پیش از مأموریت، از میان کاتالوگ های موجود یک کاتالوگ ستاره انتخاب می شود که شامل اطلاعات تمامی ستاره هاست. علاوه بر آن یک الگوریتم شناسایی ستاره نیز برای به کارگیری در حسگر انتخاب می شود. با استفاده از کاتالوگ ستاره و الگوریتم شناسایی ستاره منتخب، یک پایگاه داده شامل ویژگی های مجموعه های ستاره ای (تا یک قدر از پیش تعیین شده) ساخته می شود.

قدر ستارگان و زاویه جدایش ستارگان از جمله این خواص هستند که بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند و تاکنون بر اساس آن‌ها الگوریتم‌های شناسایی بسیاری پیشنهاد شده است [۷-۱۳]. یکی از خواص کم‌تر مورد توجه قرار گرفته، تغییرناپذیری مقادیر تکین ماتریس و بردارهای تکین راست تحت تبدیل دستگاه‌های مختصات است. این خاصیت اساس الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین را شکل می‌دهد. پیش از آنکه تجزیه مقدار تکین برای شناسایی ستاره مورد استفاده قرار گیرد، این ابزار ریاضی به‌عنوان یکی از الگوریتم‌های حل ماتریسی مسئله واهبا برای تعیین وضعیت در حسگر ستاره مورد استفاده قرار گرفته بود. الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین، نخستین بار در سال ۲۰۰۴ توسط ژوانگ پیشنهاد شد [۱۴]. ژوانگ در مقاله خود، تغییرناپذیری مقادیر تکین و بردارهای تکین راست را نسبت به تبدیل دستگاه‌های مختصات اثبات نمود. همچنین، اولین الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین را طراحی کرد [۱۴ و ۱۵]. پس از آن در اصلاحاتی بر نحوه ساخت پایگاه داده توسط ژوانگ و همکاران ارائه شد [۱۶]. در این مقاله به آنالیز حساسیت تجزیه مقدار تکین نیز پرداخته شده است. بعدها بین و همکاران، تحلیل مقاومت این الگوریتم در مقابل ستاره‌های دروغین، قدر و فاصله را ارائه نمودند و اصلاحاتی نیز بر روی الگوریتم انجام دادند [۱۷]. لیو و همکاران، یک الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر رأی‌دهی چندلایه پیشنهاد دادند [۱۸]. این الگوریتم، شامل یک فرآیند دومرحله‌ای است که هم در مرحله اولیه و هم در مرحله ثانویه، از تجزیه مقدار تکین بهره می‌برد. در پژوهش انجام شده توسط کیم و بانگ یک الگوریتم شناسایی خودکار ستاره، مبتنی بر تجزیه مقدار تکین برای شرایط دینامیک پیشنهاد شد [۱۹]. به دلیل خواص قابل توجه تجزیه مقدار تکین، این رویکرد، علاوه بر تعیین وضعیت و شناسایی در حالت گم‌شده در فضا، در موارد دیگری نیز در حسگر ستاره مورد استفاده قرار گرفته است. در [۲۰]، وو و همکاران روشی برای کالیبراسیون حسگر ستاره در مدار با استفاده از خواص تجزیه مقدار تکین و فیلتر کالمن پیشنهاد نموده‌اند. همچنین در [۲۱]، جانستون و همکاران با استفاده از تخمین‌گر سرعت زاویه‌ای مبتنی بر تجزیه مقدار تکین، یک الگوریتم شناسایی ستاره بازگشتی پیشنهاد دادند. شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین، یکی از الگوریتم‌های کمتر پرداخته شده در حسگر ستاره محسوب می‌شود. همچنین از این الگوریتم می‌توان برای شناسایی و تعیین وضعیت هم‌زمان بهره برد که این موضوع در نهایت به افزایش سرعت تعیین وضعیت منجر می‌شود؛ در این الگوریتم، حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی پایگاه داده و زمان محاسبات، به‌واسطه استفاده از ویژگی‌های مقادیر تکین و بردارهای تکین به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. همچنین، به این دلیل که در نهایت فقط سه مقدار تکین مورد مقایسه قرار می‌گیرند، این روش شناسایی، بسیار سریع است.

این پایگاه داده، پیش از مأموریت در حافظه حسگر بارگذاری می‌شود. در زمان مأموریت، تصاویر ستارگان حاضر در میدان دید حسگر ثبت می‌شود. در گام بعدی، الگوریتم از پیش تعیین شده شناسایی ستاره بر ستارگان میدان دید حسگر اجرا شده و ویژگی‌های آن‌ها استخراج می‌شود. با استفاده از مقایسه ویژگی‌ها با پایگاه داده، ستاره‌های میدان دید، شناسایی می‌شوند. با استفاده از موقعیت ستارگان شناسایی شده در کره سماوی (زوایای بعد و میل) و مختصات متناظر آن‌ها در تصویر، می‌توان وضعیت را با استفاده از یکی از الگوریتم‌های تعیین وضعیت، محاسبه کرد [۵]. فرآیند تعیین وضعیت توسط حسگر ستاره در شکل (۱) نشان داده شده است [۴].



شکل ۱- فرآیند شناسایی ستاره در سرتاسر آسمان [۴].

حسگر ستاره را می‌توان در دو حالت عملیاتی مورد استفاده قرار داد: استقرار وضعیت اولیه و ردیابی وضعیت. حالت استقرار وضعیت اولیه معمولاً برای مقداردهی اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. این حالت برای شروع به کار یا هنگامی که حسگر به دلایلی، اطلاعات از وضعیت پیشین خود را از دست داده باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت همه پایگاه داده برای شناسایی، مورد جستجو قرار می‌گیرد؛ بنابراین، این حالت نسبتاً زمان‌بر است. الگوریتم‌های شناسایی مورد استفاده در این حالت، الگوریتم‌های گم‌شده در فضا نامیده می‌شوند. حالت ردیابی وضعیت، زمانی کاربردی است که وضعیت پیشین مشخص باشد. با توجه به وضعیت پیشین و سرعت فضاپیما یا ماهواره، بخشی از آسمان که احتمال وجود ستارگان میدان دید در آن بالاتر است، مورد جستجو قرار می‌گیرد؛ بنابراین این حالت دارای سرعت بیش‌تری است [۶]. الگوریتم‌های شناسایی مورد استفاده برای این حالت، الگوریتم‌های بازگشتی نامیده می‌شوند.

شناسایی ستاره یک گام اساسی برای تعیین وضعیت توسط حسگر ستاره است. یک الگوریتم شناسایی ستاره الگویی است که بر مجموعه‌ای از ستارگان پیاده‌سازی می‌شود. الگوریتم‌های شناسایی در حسگر ستاره بر مبنای خواصی هستند که با تبدیل دستگاه‌های مختصات تغییر نمی‌کنند.

که در آن، Σ_+ یک ماتریس قطری $r \times r$ ، شامل r مقدار تکین غیر صفر X است و P_+ و Q_+ به ترتیب شامل r ستون اول P و Q است.

۳- X را می‌توان به صورت مجموع r ماتریس رنک یک نوشت:

$$X = \sum_{i=1}^r \sigma_i p_i q_i^T = \sigma_1 p_1 q_1^T + \sigma_2 p_2 q_2^T + \dots + \sigma_r p_r q_r^T \quad (4)$$

بنابراین، می‌توان مقادیر تکین صفر را نادیده گرفت زیرا آن‌ها حاوی هیچ اطلاعاتی نیستند.

۴- اگر $[X]_{m \times n}$ ماتریسی باشد که مقادیر تکین آن با $\{\sigma_i\}$ نشان داده می‌شود و X' ماتریسی باشد که با حذف یکی از ستون‌های ماتریس X به دست آمده است و مقادیر تکین آن با $\{\sigma'_i\}$ نشان داده شوند؛ در صورتی که $m \geq n$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma_1 \geq \sigma'_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma'_2 \geq \dots \geq \sigma'_{n-1} \geq \sigma_n \geq 0$$

و اگر $m < n$ باشد، آنگاه:

$$\sigma_1 \geq \sigma'_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma'_2 \geq \dots \geq \sigma'_m \geq \sigma_m \geq 0$$

۵- عدد شرطی ماتریس با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{rank}(X) &= \min(m, n) \\ \rightarrow \text{cond}_2(X) &= \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(X) &< \min(m, n) \\ \rightarrow \text{cond}_2(X) &= \infty \end{aligned}$$

الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین

اگر بردارهای واحد ستاره در چارچوب‌های مرجع اینرسی و بدنی، به ترتیب با w_i و v_i نشان داده شوند؛ برای N ستاره در میدان دید ($i = 1, \dots, N$) ماتریس‌های ستونی این بردارها به ترتیب با استفاده از $V = [v_1, v_2, \dots, v_N]$ و $W = [w_1, w_2, \dots, w_N]$ نشان داده می‌شوند (شکل ۲). این بردارها در معادله (۶) صدق می‌کنند [۱۲]:

$$W = CV \quad (6)$$

که در آن C ماتریس کسینوس هادی است به طوری که:

$$C^T C = C C^T = I \quad (7)$$

الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین بیان می‌دارد که برای هر تعداد ستاره ($N \geq 3$) دقیقاً سه مقدار تکین غیر صفر و ۳ بردار تکین راست و چپ متناظر با آن‌ها وجود خواهد داشت که برای پارامتری کردن ماتریس‌های V و W مورد استفاده قرار می‌گیرند. این تجزیه ماتریسی به صورت زیر است:

$$V = P_v \Sigma_v Q_v^T = \sum_{i=1}^3 p_{vi} \sigma_{vi} q_{vi}^T \quad (8)$$

مقاله حاضر، به تحلیل و اصلاح یکی از الگوریتم‌های اصلی شناسایی گم‌شده در فضای ستاره، مبتنی بر تجزیه مقدار تکین می‌پردازد. تغییراتی در راستای بهبود الگوریتم، صورت گرفته و تأثیر تعداد ستارگان مورد نیاز و ابعاد میدان دید بر الگوریتم، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است تا بهترین اندازه میدان دید حسگر برای این الگوریتم مشخص شود. در این مقاله، فرآیند شناسایی به عنوان یک فرآیند دومرحله‌ای مبتنی بر مقادیر تکین و بردارهای تکین در نظر گرفته شده است و نتایج خروجی شناسایی در هر یک از این مراحل برای هر الگوریتم در هر تعداد ستاره و هر اندازه میدان دید ارائه شده است. همچنین از دیدگاه نظری نیز تأثیر تعداد ستارگان بر الگوریتم تجزیه مقدار تکین با توجه به خواص مقادیر تکین مورد بررسی قرار گرفته است. روند این مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲، تجزیه مقدار تکین و ویژگی‌های آن شرح داده می‌شود. بخش ۳، به معادلات شناسایی مبتنی بر تجزیه مقدار تکین می‌پردازد. الگوریتم شناسایی بهبودیافته مبتنی بر تجزیه مقدار تکین در بخش ۴ ارائه می‌شود. در بخش ۵، نتایج شبیه‌سازی‌ها و تحلیل‌های مربوطه بیان شده‌اند. بخش‌های ۶ و ۷ نیز به ترتیب به نتیجه‌گیری و مراجع اختصاص دارد.

تجزیه مقدار تکین و ویژگی‌های آن

تجزیه مقدار تکین، یکی از قدرتمندترین ابزارها در جبر خطی محسوب می‌شود که در کاربردهای گوناگونی مورد استفاده قرار گرفته است. اگر X یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد، می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب سه ماتریس بیان کرد؛ دو ماتریس متعامد و یک ماتریس قطری. این بیان تجزیه مقدار تکین ماتریس X نامیده می‌شود (معادله ۱).

$$X = P \Sigma Q^T \quad (1)$$

در معادله (۱)، P و Q ماتریس‌های متعامدی هستند که ابعاد آن‌ها به ترتیب $m \times m$ و $n \times n$ است. Σ یک ماتریس قطری با ابعاد $m \times n$ و مؤلفه‌های نامنفی است. ستون‌های P و Q ، به ترتیب بردارهای تکین چپ و راست نامیده می‌شوند و با p و q نشان داده می‌شوند. مؤلفه‌های قطری Σ مقادیر تکین ماتریس X نامیده می‌شوند و با σ نشان داده می‌شوند؛ که روی قطر اصلی به ترتیب نزولی قرار گرفته‌اند. بنابراین اولین مقدار تکین بزرگ‌ترین آن و آخرین مقدار تکین کوچک‌ترین آن است. این نوع تجزیه ماتریسی دارای خواص منحصر به فردی است که در ادامه برخی از آن‌ها شرح داده می‌شود [۲۲ و ۲۳]:

۱- ستون‌های P بردارهای ویژه XX^T و ستون‌های Q بردارهای ویژه $X^T X$ هستند.

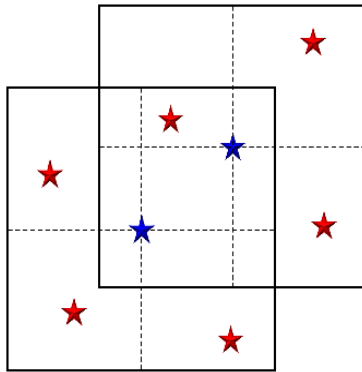
$$XX^T P = P \Sigma \Sigma^T, \quad X^T X Q = Q \Sigma^T \Sigma \quad (2)$$

۲- رنک X برابر با تعداد مقادیر تکین غیر صفر است.

$$X = P_+ \Sigma_+ Q_+^T \quad (3)$$

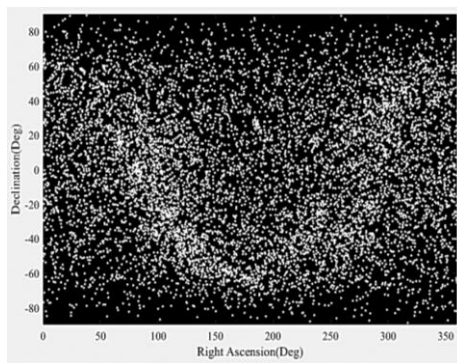
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\delta \\ \sin\alpha \cos\delta \\ \sin\delta \end{bmatrix} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، α نشان دهنده زاویه بعد و δ نشان دهنده زاویه میل است. در الگوریتم اصلی تجزیه مقدار تکین که توسط ژوانگ پیشنهاد شده است، هر ستاره به عنوان یک بردار جهتی در نظر گرفته می شود. با توجه به ابعاد میدان دید که $8^\circ \times 8^\circ$ در نظر گرفته شده است، ستارگان همسایه ستاره اصلی مشخص می شوند. از مجموع ستاره اصلی و ستارگان همسایه آن، ۴ ستاره روشن تر انتخاب می شوند و با استفاده از بردار جهتی آن ها ماتریس مربوط به آن مجموعه ساخته می شود. سپس مقادیر تکین و بردارهای تکین راست و چپ ماتریس محاسبه می شوند. این مقادیر و بردارهای تکین پایگاه داده را تشکیل می دهند. این روش در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل ۳- ساخت پایگاه داده در الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین

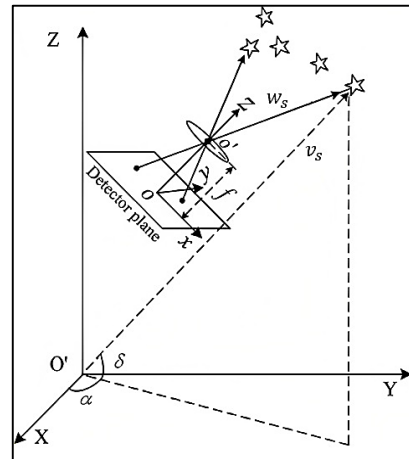
در این نحوه ساخت پایگاه داده معیابی وجود دارد. با استفاده از انتخاب ۴ ستاره روشن تر برای هر جهت، این امکان وجود دارد که مجموعه های همسایه دارای ستارگان یکسان باشند تعداد این مجموعه های تکراری در مناطقی از کره سماوی که تراکم بالایی از ستارگان وجود دارد، به طور قابل توجهی افزایش می یابد. توزیع ستارگان کره سماوی در دو بعد برای ستارگان روشن تر از قدر ۶/۵ در کاتالوگ ستاره های هیپارکوس در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل ۴- توزیع دوبعدی ستارگان در کره سماوی برای ستارگان روشن تر از قدر ۶/۵ در کاتالوگ ستاره های هیپارکوس

$$W = P_w \Sigma_w Q_w^T = \sum_{i=1}^3 p_{wi} \sigma_{wi} q_{wi}^T \quad (9)$$

که P_w و P_v ماتریس های متعامد 3×3 مربوط به بردارهای تکین چپ هستند. Q_w و Q_v ماتریس های متعامد $N \times N$ برای بردارهای تکین راست می باشند. در نهایت سه بردار از هر یک از این ماتریس ها متناظر با مقادیر تکین W و V هستند.



شکل ۲- بردارهای جهتی ستاره ها در چارچوب مرجع و چارچوب اندازه گیری [۲۴]

نامتغیر بودن مقادیر تکین و بردارهای تکین راست، تحت هر تبدیل مختصاتی یکتا، استفاده از تجزیه مقدار تکین را برای شناسایی ستاره مناسب می سازد که به شرح زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{wi} &= \sigma_{vi} \\ q_{wi} &= \pm q_{vi} \\ p_{wi} &= \pm C p_{vi} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (10)$$

لازم به ذکر است که علامت های بردارهای تکین راست و چپ باید با یکدیگر هم خوانی داشته باشند.

$$P_w = C P_v L \quad (11)$$

علامت بردارهای تکین با استفاده از رابطه زیر مشخص

می شود:

$$L = \text{diag}[\text{sign}(q_{w1}^T q_{v1}), \text{sign}(q_{w2}^T q_{v2}), \text{sign}(q_{w3}^T q_{v3})]$$

در نهایت، ماتریس وضعیت نیز به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$C = P_w (P_v L)^T \quad (12)$$

الگوریتم بهبود یافته

اولین گام در شناسایی ستاره با استفاده از تجزیه مقدار تکین، ساخت ماتریسی است که با استفاده از بردار جهتی ستارگان ساخته می شود. بردار جهتی ستاره با استفاده از زوایای بعد و میل ستاره و از طریق رابطه (۱۳) به دست می آید:

با رنگ آن است؛ اما از آنجا که بردار جهتی برای هر ستاره، یک بردار سه مؤلفه‌ای است؛ فارغ از تعداد ستاره‌ها، همواره ۳ مقدار تکین وجود خواهد داشت. در این مقاله، تأثیرات مربوط به تعداد ستاره‌های به کار گرفته شده برای شناسایی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد مورد آزمایش برای ستاره‌ها ۳، ۴ و ۵ ستاره است. روندنمای الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین در شکل (۵) نشان داده شده است.

شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

در این بخش، نتایج شبیه‌سازی‌ها و تحلیل‌های مربوطه ارائه می‌شود. شبیه‌سازی‌ها براساس ستارگان روشن‌تر از قدر ۶/۵ در کاتالوگ ستاره‌ای هیپارکوس انجام شده است. شبیه‌سازی‌ها برای الگوریتم اصلی تجزیه مقدار تکین و الگوریتم بهبودیافته در این مقاله انجام شده و نتایج آن‌ها ارائه شده است. در هر یک از رویکردها، شبیه‌سازی‌ها برای تعداد ۳، ۴ و ۵ ستاره و ابعاد میدان دید $6^\circ \times 6^\circ$ ، $8^\circ \times 8^\circ$ ، $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ توسط نرم‌افزار متلب اجرا شده است. برای اجرای الگوریتم‌ها از کامپیوتر با مشخصات Intel (R) Core™ i7-2670QM 2.20 GHz CPU and 6GB RAM استفاده شده است. محدوده خطای در نظر گرفته شده در محاسبات، $10^{-3} \times 3$ بوده است. این مشخصات به طور خلاصه در جدول شماره (۱) بیان شده است.

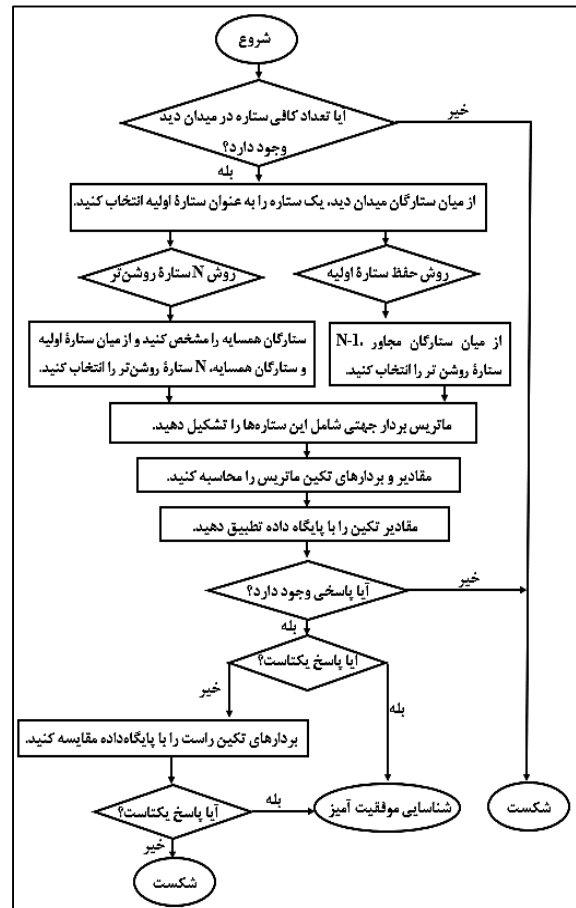
جدول ۱- مشخصات حسگر ستاره

کاتالوگ مورد استفاده	کاتالوگ ستاره‌های هیپارکوس
محدوده قدر	۶/۵
محدوده خطا	3×10^{-3}
ابعاد میدان دید	$12^\circ \times 12^\circ$ و $10^\circ \times 10^\circ$ ، $8^\circ \times 8^\circ$ و $6^\circ \times 6^\circ$
تعداد ستاره‌ها	۳، ۴ و ۵ ستاره

برای ساخت مجموعه‌های ستاره‌ای در گام اول هر ستاره به‌عنوان یک ستاره اصلی در نظر گرفته شده است. سپس با توجه به ابعاد میدان دید، ستارگان همسایه آن مشخص شده‌اند. در نهایت با توجه به تعداد ستارگان مورد نیاز برای ساخت مجموعه، ستارگان هر مجموعه انتخاب شده‌اند. به دلیل اینکه تعداد ستاره‌ها با نحوه انتخاب ستاره‌ها ارتباطی ندارد، بنابراین تعداد مجموعه‌های ستاره‌ای در هر دو رویکرد سنتی و بهبودیافته یکسان است. تعداد مجموعه‌های ستاره‌ای برای تعداد ۳، ۴ و ۵ ستاره در ابعاد بیان شده میدان دید برای الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین در شکل (۶) نشان داده شده است. این نتایج در جدول شماره (۲) خلاصه شده است.

با توجه به شکل (۶) و جدول (۲)، استفاده از تعداد ستارگان کم‌تر، احتمال وجود نقاط کور در پایگاه داده را برای میدان‌های دید کوچک‌تر

در این مقاله به‌منظور بهبود عملکرد شناسایی در الگوریتم ژوانگ تغییراتی اعمال شده است. در رویکرد جدید به‌جای انتخاب ۴ ستاره روشن‌تر، ستاره اولیه، فارغ از قدر آن حفظ می‌شود. این کار تعداد مجموعه‌های تکراری در پایگاه داده را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد؛ زیرا ستارگان اولیه، لزوماً در میان N ستاره روشن‌تر در مجموعه خود قرار ندارند.



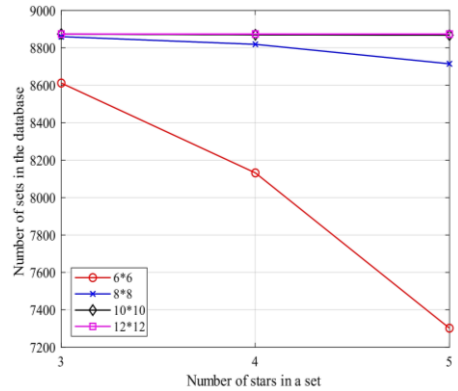
شکل ۵- روندنمای الگوریتم‌های شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین

دومین تغییر صورت گرفته، تغییر در ابعاد میدان دید است. در الگوریتم ژوانگ، ابعاد میدان دید $8^\circ \times 8^\circ$ در نظر گرفته شده است. در اینجا به‌منظور بررسی تأثیر ابعاد میدان دید بر عملکرد الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین، در شبیه‌سازی‌ها از چهار میدان دید مختلف با ابعاد $6^\circ \times 6^\circ$ ، $8^\circ \times 8^\circ$ ، $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ استفاده شده است و نتایج مربوط به تأثیر اندازه میدان دید بر شناسایی صحیح، مجموعه‌های تکراری در پایگاه داده و نیز عدم وجود ستارگان کافی در مجموعه‌های ستاره‌ای بررسی شده است. سومین مورد بررسی شده، تعداد ستاره‌های مورد نیاز برای شناسایی است. در الگوریتم ژوانگ از ۴ ستاره برای شناسایی استفاده شده است اما در حالت کلی ۳ ستاره برای اجرای عملیات شناسایی کافی است؛ زیرا تعداد مقادیر تکین یک ماتریس برابر

وجود دارد. هرچه میدان دید کوچکتر و تعداد ستارهها بیشتر شود، در موارد بیش تری تعداد ستارگان برای شناسایی کافی نخواهد بود. بهطوری که برای حالت ۵ ستاره و در میدان دید $6^\circ \times 6^\circ$ تقریباً در یک پنجم موارد تعداد کافی ستاره در میدان دید برای شناسایی وجود ندارد.

شکل‌های (۷ و ۸) به ترتیب نرخ شناسایی صحیح و نرخ مجموعه‌های تکراری در دو رویکرد شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین را با توجه به ابعاد میدان دید، در تعداد مختلف ستاره‌های مورد نیاز برای شناسایی نشان می‌دهند. نرخ شناسایی صحیح، مجموع شناسایی صحیح با استفاده از مقادیر تکین و بردارهای تکین است. به‌طور کلی در روش N ستاره روشن‌تر برای ۳ ستاره، در میدان‌های دید $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ نرخ شناسایی صحیح کم است. دلیل این موضوع نرخ بالای پاسخ‌های تکراری است که نشان می‌دهد در صورت استفاده هم‌زمان از میدان دید کوچک و تعداد کم ستارگان برای شناسایی، تعداد بسیاری مجموعه‌های تکراری در پایگاه داده وجود خواهد داشت. در این رویکرد با افزایش تعداد ستاره‌های مورد استفاده، در حالت کلی نرخ شناسایی صحیح افزایش می‌یابد؛ زیرا در صورت استفاده از تعداد بیش‌تر ستارگان برای شناسایی، درصد مجموعه‌های تکراری در پایگاه داده کاهش می‌یابد. مشکل مجموعه‌های تکراری در رویکرد بهبودیافته که در آن ستاره اولیه فارغ از قدر آن حفظ می‌شود، به‌طور قابل توجهی کاهش یافته است؛ زیرا لازم نیست که روشن‌ترین ستاره‌های میدان دید برای شناسایی به کار گرفته شوند و در بسیاری از موارد، ستاره اولیه در میان روشن‌ترین ستاره‌های میدان دید قرار ندارد؛ زیرا تعداد ستارگان کم‌نور از تعداد ستارگان روشن بسیار بیش‌تر است. به‌طور مثال، در کاتالوگ ستاره‌های هیبارکوس، تعداد ستاره‌های روشن‌تر از قدر چهار، ۵۱۰ ستاره است؛ این در حالی است که در این کاتالوگ، ۷۱۶۰ ستاره بین قدرهای ۵ تا ۶/۵ وجود دارد. رویکرد بهبودیافته، در میدان‌های دید بزرگ‌تر دارای عملکرد بهتری است؛ زیرا علاوه بر کاهش قابل توجه تعداد مجموعه‌های تکراری، تعداد کافی ستاره در میدان دید برای شناسایی وجود دارد. در حالت کلی این رویکرد به‌طور قابل توجهی عملکرد بهتری دارد. نرخ شناسایی این روش برای میدان‌های دید بزرگ‌تر، همواره بیش‌تر از ۹۷٪ بوده است. در این رویکرد، در میدان‌های دید $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ نرخ شناسایی برای سه ستاره ۱۰۰٪، برای چهار ستاره به ترتیب ۹۷٪ و ۹۹٪ و برای پنج ستاره به ترتیب ۹۷٪ و ۹۹٪ بوده است. در روش N ستاره روشن‌تر نرخ‌های شناسایی برای این دو میدان دید برای سه ستاره ۲۸/۵٪ و ۲۳/۵٪، برای چهار ستاره ۴۱/۵٪ و ۴۲٪ و برای پنج ستاره ۵۵٪ و ۴۷٪ می‌باشد. همچنین با توجه به نتایج می‌توان دریافت که در الگوریتم تجزیه مقدار تکین استفاده از میدان دید $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ انتخاب بهتری است. ولی با توجه به شرایط استفاده در فضای واقعی، میدان دید $10^\circ \times 10^\circ$ پیشنهاد می‌شود؛ زیرا نیز نورهای اضافی کم‌تری در بخش عکس‌برداری حسگر ستاره وارد خواهد شد. نرخ شناسایی صحیح با توجه به تعداد ستاره‌های مورد استفاده برای شناسایی در شکل‌های (۹) و

کاهش می‌دهد. این تغییر، به‌خصوص برای میدان دید $6^\circ \times 6^\circ$ بسیار مشهود است. به‌طوری که با استفاده از ۳ ستاره در میدان دید $6^\circ \times 6^\circ$ تعداد ۸۶۱۲ مجموعه ستاره‌ای در پایگاه داده وجود خواهد داشت؛ اما در همین اندازه میدان دید در صورت استفاده از ۵ ستاره، تعداد مجموعه‌های ستاره‌ای در پایگاه داده به ۷۳۰۲ مجموعه کاهش می‌یابد.



شکل ۶- تعداد مجموعه‌های ستاره‌ای در پایگاه داده الگوریتم شناسایی

جدول ۲- تعداد مجموعه‌های ستاره‌ای در پایگاه داده با توجه به تعداد ستاره‌های مورد نیاز برای الگوریتم شناسایی

ابعاد میدان دید	۳ ستاره	۴ ستاره	۵ ستاره
$6^\circ \times 6^\circ$	۸۶۱۲	۸۱۳۲	۷۳۰۲
$8^\circ \times 8^\circ$	۸۸۶۰	۸۸۱۹	۸۷۱۵
$10^\circ \times 10^\circ$	۸۸۷۴	۸۸۷۰	۸۸۶۸
$12^\circ \times 12^\circ$	۸۸۷۴	۸۸۷۴	۸۸۷۴

در مقابل، در صورتی که اندازه میدان دید $12^\circ \times 12^\circ$ باشد، برای ستارگان روشن‌تر از قدر ۶/۵ در کاتالوگ ستاره‌های هیبارکوس که شامل ۸۸۷۴ ستاره می‌شود، همواره تعداد کافی ستاره در میدان دید برای شناسایی وجود خواهد داشت.

به‌منظور ارزیابی کارایی روش‌ها، شبیه‌سازی برای ۲۰۰ جهت تصادفی حسگر ستاره برای هر یک از روش‌ها در تعداد ستاره‌ها و ابعاد میدان دید بیان شده، انجام شده است. در این مقاله شناسایی ستاره به‌صورت یک فرآیند دو مرحله‌ای در نظر گرفته شده است: پاسخ‌های یکتا با مقادیر تکین و پاسخ‌های یکتا با بردارهای تکین. در مورد دوم، فقط با استفاده از مقادیر تکین نمی‌توان به پاسخ‌های یکتا دست‌یافت و علاوه بر آن‌ها باید بردارهای تکین را نیز مورد ارزیابی قرار داد. همچنین، نرخ مجموعه‌های تکراری در هر روش به‌عنوان معیاری برای ارزیابی کارایی روش مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی‌ها در جدول‌های (۳-۵) ارائه شده است.

با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌ها در میدان‌های دید بزرگ‌تر ($10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$) همواره تعداد کافی ستاره در میدان دید برای شناسایی

روش N ستاره درخشان تر با افزایش تعداد ستاره‌ها نرخ پاسخ‌های تکراری کاهش می‌یابد؛ این در حالی است که نرخ پاسخ‌های تکراری در روش حفظ ستاره اولیه در تمامی تعداد ستاره‌ها و ابعاد میدان دید اندک است. دلیل این موضوع اعمال قید حفظ ستاره اولیه است.

۱۰) نشان داده شده است. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که در روش N ستاره روشن‌تر با افزایش تعداد ستاره‌های مورد استفاده، نرخ شناسایی افزایش می‌یابد؛ زیرا تعداد کم‌تری مجموعه‌های تکراری وجود دارد. شکل‌های (۱۱ و ۱۲) نرخ پاسخ‌های تکراری با توجه به تعداد ستاره‌های مورد استفاده برای شناسایی را نشان می‌دهند. در میدان‌های دید بزرگ‌تر در

جدول ۳- نتایج شبیه‌سازی برای ۳ ستاره

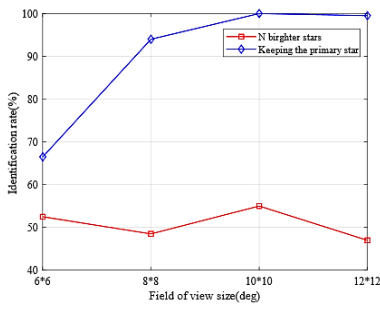
روش	ابعاد میدان دید	بدون پاسخ	پاسخ‌های صحیح (فقط با مقادیر تکین)	پاسخ‌های صحیح (با مقادیر و بردارهای تکین)	پاسخ‌های تکراری	مجموع پاسخ‌های صحیح
انتخاب ستاره N روشن‌تر	$6^\circ \times 6^\circ$	٪۲/۵	٪۱۷/۵	٪۲۲/۵	٪۵۷/۵	٪۴۰
	$8^\circ \times 8^\circ$	٪۱	٪۲۱	٪۱۵/۵	٪۶۲/۵	٪۳۵/۵
	$10^\circ \times 10^\circ$	٪۰	٪۱۹/۵	٪۹	٪۷۱/۵	٪۲۸/۵
حفظ ستاره اولیه	$12^\circ \times 12^\circ$	٪۰	٪۱۹/۵	٪۴	٪۷۶/۵	٪۲۳/۵
	$6^\circ \times 6^\circ$	٪۲	٪۱۱/۵	٪۸۴/۵	٪۲	٪۹۶
	$8^\circ \times 8^\circ$	٪۱/۵	٪۱۶/۵	٪۸۱	٪۱	٪۹۷/۵
	$10^\circ \times 10^\circ$	٪۰	٪۱۷	٪۸۳	٪۰	٪۱۰۰
	$12^\circ \times 12^\circ$	٪۰	٪۱۹/۵	٪۸۰/۵	٪۰	٪۱۰۰

جدول ۴- نتایج شبیه‌سازی برای ۴ ستاره

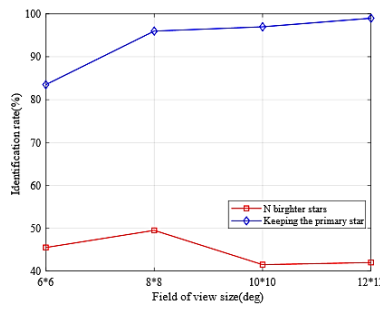
روش	ابعاد میدان دید	بدون پاسخ	پاسخ‌های صحیح (فقط با مقادیر تکین)	پاسخ‌های صحیح (با مقادیر و بردارهای تکین)	پاسخ‌های تکراری	مجموع پاسخ‌های صحیح
انتخاب ستاره N روشن‌تر	$6^\circ \times 6^\circ$	٪۱۰	٪۲۰	٪۲۵/۵	٪۴۲/۵	٪۴۵/۵
	$8^\circ \times 8^\circ$	٪۱/۵	٪۲۷	٪۲۲/۵	٪۴۹	٪۴۹/۵
	$10^\circ \times 10^\circ$	٪۰	٪۳۰/۵	٪۱۱	٪۵۸/۵	٪۴۱/۵
حفظ ستاره اولیه	$12^\circ \times 12^\circ$	٪۰	٪۲۱/۵	٪۲۰/۵	٪۵۸	٪۴۲
	$6^\circ \times 6^\circ$	٪۱۰	٪۱۴/۵	٪۶۹	٪۶/۵	٪۸۳/۵
	$8^\circ \times 8^\circ$	٪۰/۵	٪۲۰	٪۷۶	٪۳/۵	٪۹۶
	$10^\circ \times 10^\circ$	٪۰	٪۲۱/۵	٪۷۵/۵	٪۳	٪۹۷
	$12^\circ \times 12^\circ$	٪۰	٪۳۰	٪۶۹	٪۱	٪۹۹

جدول ۵- نتایج شبیه‌سازی برای ۵ ستاره

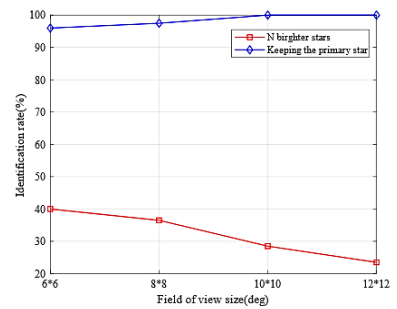
روش	ابعاد میدان دید	بدون پاسخ	پاسخ‌های صحیح (فقط با مقادیر تکین)	پاسخ‌های صحیح (با مقادیر و بردارهای تکین)	پاسخ‌های تکراری	مجموع پاسخ‌های صحیح
انتخاب ستاره N روشن‌تر	$6^\circ \times 6^\circ$	٪۲۱	٪۱۸	٪۳۴/۵	٪۲۶/۵	٪۵۲/۵
	$8^\circ \times 8^\circ$	٪۳/۵	٪۲۳	٪۲۵/۵	٪۴۸	٪۴۸/۵
	$10^\circ \times 10^\circ$	٪۰/۵	٪۳۶	٪۱۹	٪۴۴/۵	٪۵۵
حفظ ستاره اولیه	$12^\circ \times 12^\circ$	٪۰	٪۳۹	٪۸	٪۵۳	٪۴۷
	$6^\circ \times 6^\circ$	٪۱۸/۵	٪۱۵/۵	٪۵۱	٪۱۵	٪۶۶/۵
	$8^\circ \times 8^\circ$	٪۱/۵	٪۲۴/۵	٪۶۹/۵	٪۴/۵	٪۹۴
	$10^\circ \times 10^\circ$	٪۰	٪۳۰	٪۷۰	٪۰/۵	٪۱۰۰
	$12^\circ \times 12^\circ$	٪۰	٪۲۹/۵	٪۷۰	٪۰/۵	٪۹۹/۵



(ج)

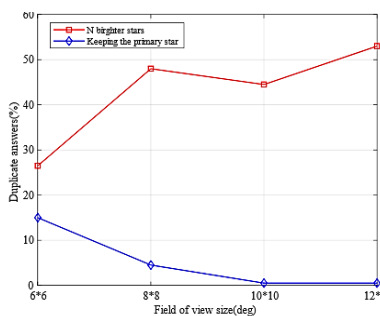


(ب)

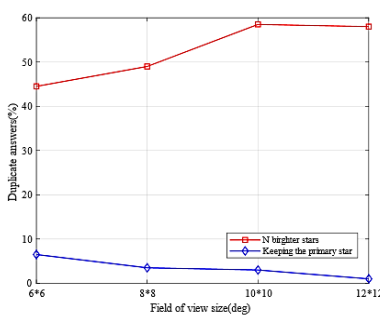


(الف)

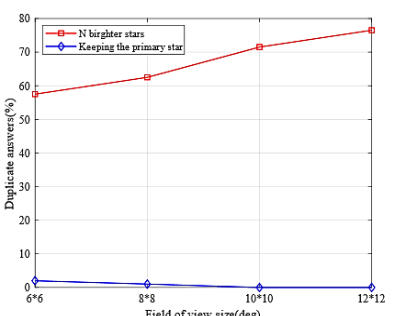
شکل ۷- نرخ شناسایی صحیح در رویکردهای مختلف الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین با توجه به اندازه میدان دید. الف) سه ستاره ب) چهار ستاره ج) پنج ستاره



(ج)

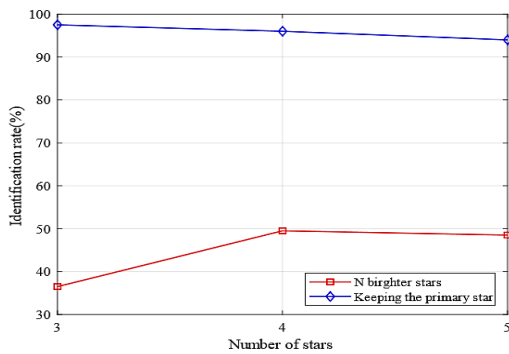


(ب)

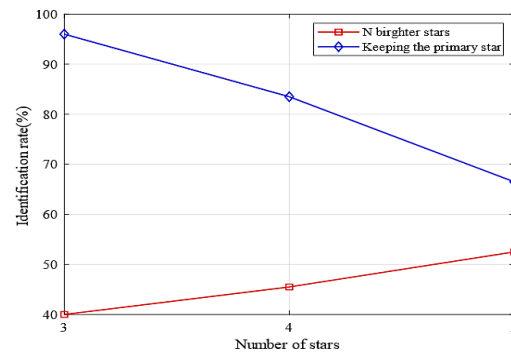


(الف)

شکل ۸- نرخ پاسخهای تکراری در رویکردهای مختلف الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین با توجه به اندازه میدان دید. الف) سه ستاره ب) چهار ستاره ج) پنج ستاره

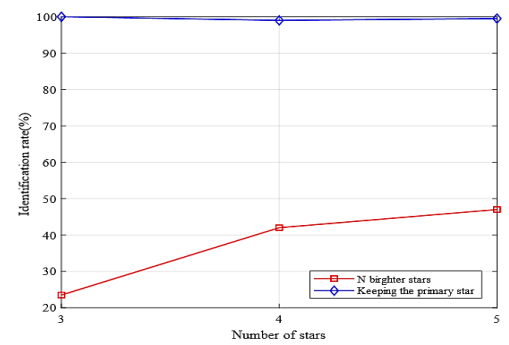


(ب)

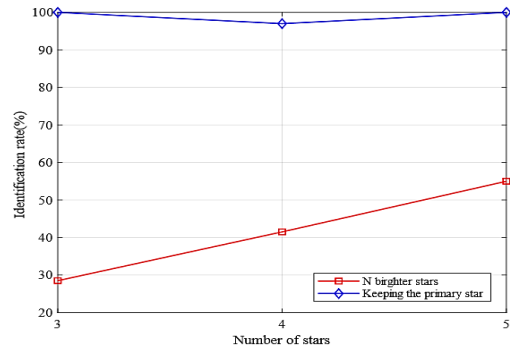


(الف)

شکل ۹- نرخ شناسایی صحیح در رویکردهای مختلف الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین با توجه به تعداد ستارهها. الف) میدان دید ۶° × ۶° ب) میدان دید ۸° × ۸°

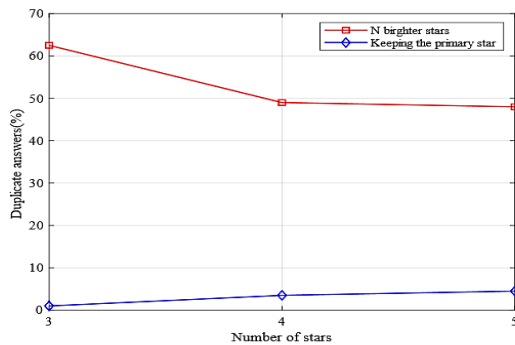


(ب)

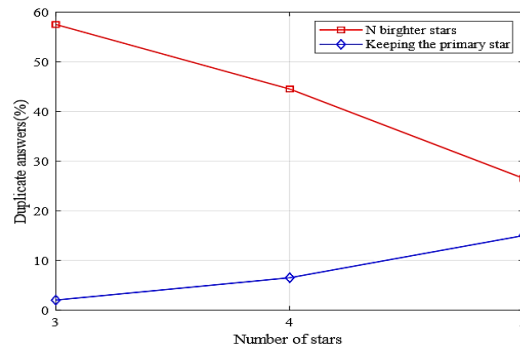


(الف)

شکل ۱۰- نرخ شناسایی صحیح در رویکردهای مختلف الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین با توجه به تعداد ستارهها. الف) میدان دید ۱۰° × ۱۰° ب) میدان دید ۱۲° × ۱۲°

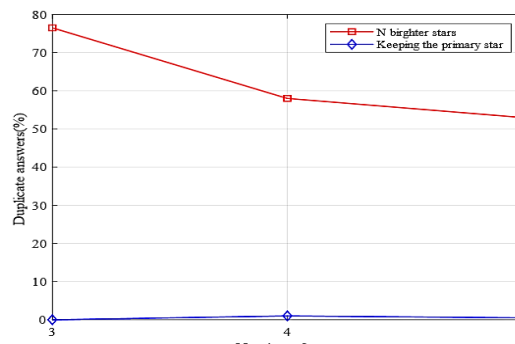


(ب)

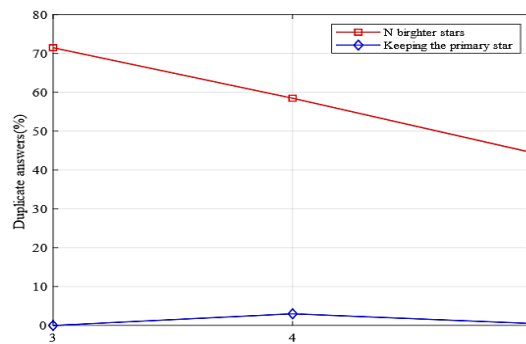


(الف)

شکل ۱۱- پاسخ‌های تکراری در رویکردهای مختلف الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین با توجه به تعداد ستاره‌ها. (الف) میدان دید $6^\circ \times 6^\circ$ (ب) میدان دید $8^\circ \times 8^\circ$



(ب)



(الف)

شکل ۱۲- پاسخ‌های تکراری در رویکردهای مختلف الگوریتم شناسایی تجزیه مقدار تکین با توجه به تعداد ستاره‌ها. (الف) میدان دید $10^\circ \times 10^\circ$ (ب) میدان دید $12^\circ \times 12^\circ$

بخش ۲ عدد شرطی ماتریس، نسبت بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس به کوچک‌ترین مقدار تکین آن است. زمانی که عدد شرطی بسیار بزرگ باشد، عملاً کوچک‌ترین مقدار تکین قابل استفاده نیست. به طور مثال در مجموعه ستاره‌ای شامل ستارگان با نمایه‌های ۵۸۸۷۴، ۶۲۵۷۲ و ۶۲۵۶۱ در کاتالوگ ستاره‌ای هیبارکوس، بزرگ‌ترین مقدار تکین این ماتریس $1/7317$ و کوچک‌ترین مقدار تکین آن $0/00017056$ می‌باشد که از میزان خطای در نظر گرفته شده بسیار بسیار کوچک‌تر است. عدد شرطی این ماتریس $101530/2532$ می‌باشد؛ بنابراین به منظور اجتناب از مواردی که در آن سومین مقدار تکین بسیار کوچک است بهتر است از بیش از ۳ ستاره برای شناسایی استفاده شود.

موضوع مهم دیگر برای یک الگوریتم شناسایی ستاره، زمان شناسایی است. میانگین و بیشینه زمان شناسایی در این الگوریتم در جدول‌های (۶) تا (۸) بیان گردیده است. همان گونه که از نتایج بیان شده در جدول‌های (۶) تا (۸) مشخص است، در این الگوریتم تعداد ستاره‌ها و ابعاد میدان دید تأثیر چندانی بر میانگین زمان شناسایی ندارد و میانگین زمان شناسایی در محدوده $0/38$ تا $0/43$ ثانیه بوده است. این میانگین زمانی که با استفاده از جستجوی خطی به دست آمده است، نشان می‌دهد که الگوریتم تجزیه مقدار تکین برای کاربردهای پهن‌بند مناسب است.

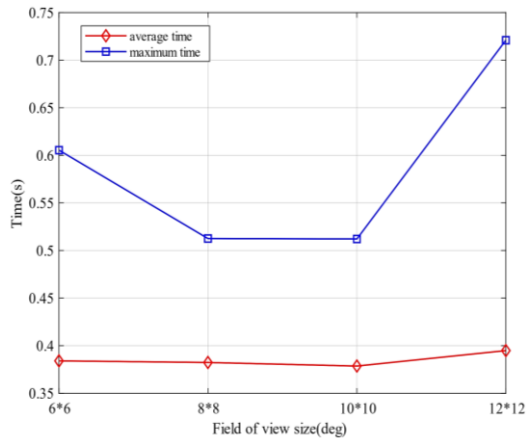
همچنین در روش حفظ ستاره اولیه استفاده از ۳ یا ۵ ستاره نسبت به ۴ ستاره نرخ شناسایی بالاتری دارد. در روش N ستاره درخشان‌تر، نتایج شناسایی در ۴ ستاره نسبت به ۳ ستاره بهتر است. در مجموع، استفاده از ۵ ستاره، نتایج بهتری را نشان می‌دهد.

از دیدگاه تحلیلی، با توجه به خاصیت شماره ۴ در بخش ۲، اگر یک ماتریس از راه حذف هر یک از ستون‌های یک ماتریس اولیه به دست آمده باشد، آنگاه هر یک از مقادیر تکین آن ماتریس از مقادیر تکین متناظر در ماتریس اولیه کوچک‌تر هستند؛ بنابراین، اگر سه ماتریس وجود داشته باشند که به ترتیب با استفاده از ۳، ۴ و ۵ ستاره ساخته باشند، بین مقادیر تکین این ماتریس‌ها رابطه زیر برقرار است:

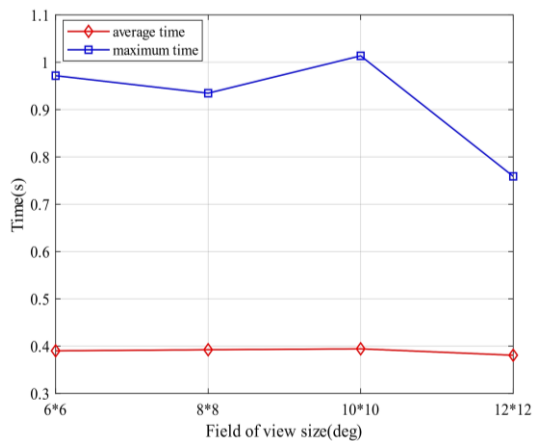
$$\begin{aligned} \sigma_{15} &\geq \sigma_{14} \geq \sigma_{13} \\ \sigma_{25} &\geq \sigma_{24} \geq \sigma_{23} \\ \sigma_{35} &\geq \sigma_{34} \geq \sigma_{33} \end{aligned} \quad (14)$$

بنابراین، ماتریس‌هایی که با استفاده از ۳ ستاره ساخته می‌شوند نسبت به ماتریس‌هایی که با استفاده از ۴ و ۵ ستاره ساخته می‌شوند، مقادیر تکین کوچک‌تری دارند. در حالتی که الگوریتم بر اساس ۳ ستاره باشد، در برخی موارد سومین مقدار تکین از میزان خطای تعیین شده کوچک‌تر و بسیار نزدیک به صفر است. با توجه به ویژگی شماره ۵ در

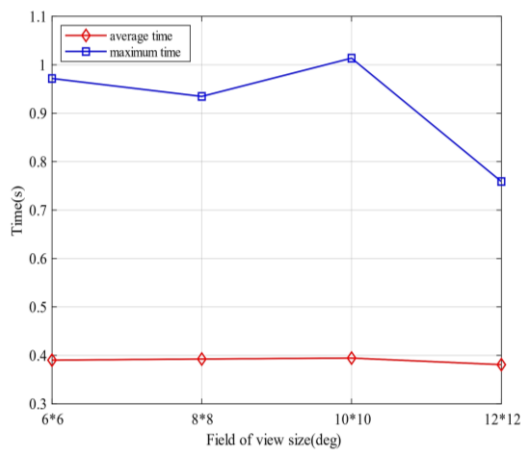
همچنین مقادیر بیان شده در این جدول‌ها در نمودارهای (۱۳-۱۸) به تصویر کشیده شده است.



شکل ۱۳- میانگین و بیشینه زمان شناسایی برای سه ستاره در ابعاد مختلف میدان دید در روش حفظ ستاره اولیه



شکل ۱۴- میانگین و بیشینه زمان شناسایی برای چهار ستاره در ابعاد مختلف میدان دید در روش حفظ ستاره اولیه



شکل ۱۵- میانگین و بیشینه زمان شناسایی برای پنج ستاره در ابعاد مختلف میدان دید در روش حفظ ستاره اولیه

جدول ۶- میانگین زمان شناسایی برای ۳ ستاره

روش	ابعاد میدان دید	میانگین زمان شناسایی (ثانیه)	بیشینه زمان شناسایی (ثانیه)
انتخاب ستاره N روشن‌تر	۶° × ۶°	۰/۴۳۲۱	۰/۵۶۳۶
	۸° × ۸°	۰/۴۱۲۵	۰/۶۸۵۶
	۱۰° × ۱۰°	۰/۳۹۰۹	۱/۲۶۰۴
	۱۲° × ۱۲°	۰/۳۹۸۴	۰/۸۰۵۲
حفظ ستاره اولیه	۶° × ۶°	۰/۳۸۴۱	۰/۶۰۵۴
	۸° × ۸°	۰/۳۸۲۴	۰/۵۱۲۶
	۱۰° × ۱۰°	۰/۳۷۸۶	۰/۵۱۲۱
	۱۲° × ۱۲°	۰/۳۹۴۹	۰/۷۲۰۹

جدول ۷- میانگین زمان شناسایی برای ۴ ستاره

روش	ابعاد میدان دید	میانگین زمان شناسایی (ثانیه)	بیشینه زمان شناسایی (ثانیه)
انتخاب ستاره N روشن‌تر	۶° × ۶°	۰/۴۰۴۸	۰/۷۵۴۴
	۸° × ۸°	۰/۳۸۸۰	۰/۵۵۴۳
	۱۰° × ۱۰°	۰/۳۸۷۵	۰/۵۲۶۰
	۱۲° × ۱۲°	۰/۴۰۷۶	۱/۲۴۴۲
حفظ ستاره اولیه	۶° × ۶°	۰/۳۹۰۲	۰/۹۷۱۶
	۸° × ۸°	۰/۳۹۲۵	۰/۹۳۴۶
	۱۰° × ۱۰°	۰/۳۹۴۴	۱/۰۱۳۶
	۱۲° × ۱۲°	۰/۳۸۰۹	۰/۷۵۸۹

جدول ۸- میانگین زمان شناسایی برای ۵ ستاره

روش	ابعاد میدان دید	میانگین زمان شناسایی (ثانیه)	بیشینه زمان شناسایی (ثانیه)
انتخاب ستاره N روشن‌تر	۶° × ۶°	۰/۳۸۵۴	۰/۴۴۵۸
	۸° × ۸°	۰/۳۸۸۰	۱/۴۵۲۳
	۱۰° × ۱۰°	۰/۳۸۵۲	۱/۵۶۱۸
	۱۲° × ۱۲°	۰/۴۰۰۸	۱/۱۲۰۲
حفظ ستاره اولیه	۶° × ۶°	۰/۳۹۸۱	۰/۸۵۲۹
	۸° × ۸°	۰/۴۰۶۰	۱/۲۵۰۴
	۱۰° × ۱۰°	۰/۴۰۶۹	۰/۵۰۳۶
	۱۲° × ۱۲°	۰/۳۹۲۶	۰/۹۳۲۱

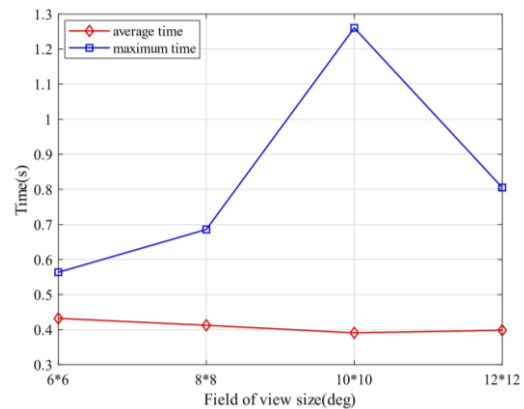
کمتر است. همچنین بیشینه زمان شناسایی در میدان‌های دید $6^\circ \times 6^\circ$ و $8^\circ \times 8^\circ$ و $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ کم‌تر است.

نتیجه‌گیری

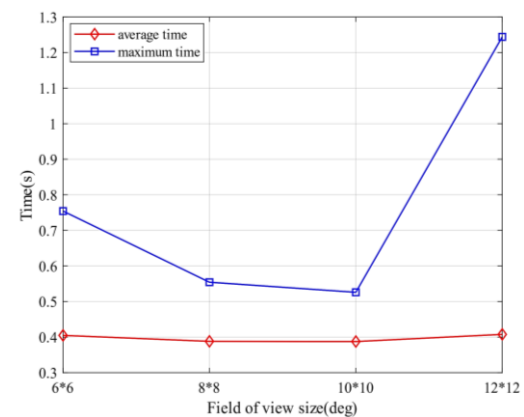
در این مقاله، تحلیل و بهبود الگوریتم شناسایی ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین ارائه شد. الگوریتم بهبود یافته با افزودن یک قید برای حفظ بردار جهتی ستاره اولیه فارغ از قدر آن به دست آمده است. تحلیل‌های ارائه شده شامل تأثیر ابعاد میدان دید و تعداد ستارگان استفاده شده بر نرخ شناسایی و تعداد مجموعه‌های ستاره‌ای تکراری در پایگاه داده بوده است. بدین منظور میدان‌های دید با ابعاد $6^\circ \times 6^\circ$ ، $8^\circ \times 8^\circ$ ، $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ مورد بررسی قرار گرفتند. برای ساخت پایگاه داده و شناسایی، استفاده از ۳، ۴ و ۵ ستاره مورد بررسی قرار گرفت. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داد، میانگین نرخ شناسایی در روش N ستاره درخشان‌تر، $41/42\%$ و میانگین نرخ شناسایی در رویکرد بهبود یافته $94/08\%$ درصد بوده است. بنابراین رویکرد بهبود یافته، بهبود بیش از 50% در عملکرد شناسایی را نشان می‌دهد. نرخ شناسایی در رویکرد بهبود یافته در میدان‌های دید $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ همواره بیش از 97% است. در این میدان‌های دید در قدر $6/5$ ، تعداد کافی ستاره در میدان دید برای شناسایی وجود دارد. میانگین نرخ شناسایی دو رویکرد و در تعداد مختلف ستارگان برای میدان دید $10^\circ \times 10^\circ$ ، $10^\circ \times 10^\circ$ و $12^\circ \times 12^\circ$ بوده است. با توجه به نتایج و نیز ملاحظات ساخت و شرایط فضای واقعی، می‌توان $10^\circ \times 10^\circ$ را مناسب‌ترین اندازه برای میدان دید در الگوریتم تجزیه مقدار تکین در نظر گرفت. همچنین تحلیل‌ها نشان داد با استفاده از ۳ ستاره در مواردی، سومین مقدار تکین بسیار کوچک و عدد شرطی ماتریس بسیار بزرگ می‌شود. با کوچک‌تر بودن مقدار تکین سوم از محدوده خطای در نظر گرفته شده، عملاً این مقدار تکین از محاسبات کنار گذاشته می‌شود؛ بنابراین بهتر است در الگوریتم تجزیه مقدار تکین از تعداد بیش از ۳ ستاره استفاده شود. در مجموع رویکرد بهبود یافته با استفاده از ۵ ستاره و ابعاد میدان دید $10^\circ \times 10^\circ$ انتخاب بهتری است. علاوه بر این موارد، رویکرد بهبود یافته در بیشینه زمان شناسایی عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. از آنجا که تاکنون تجزیه مقدار تکین برای شناسایی ستاره و تعیین وضعیت در حسگر ستاره مورد استفاده قرار گرفته است؛ در ادامه پیشنهاد می‌شود که پژوهشگران، پردازش تصویر ستاره مبتنی بر تجزیه مقدار تکین را نیز مورد بررسی قرار دهند.

تعارض منافع

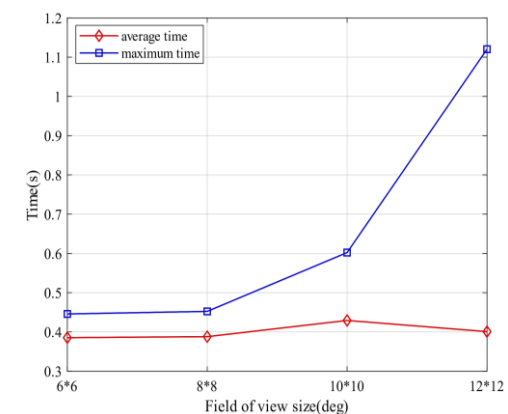
هیچگونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.



شکل ۱۶- میانگین و بیشینه زمان شناسایی برای سه ستاره در ابعاد مختلف میدان دید در روش N ستاره روشن‌تر



شکل ۱۷- میانگین و بیشینه زمان شناسایی برای چهار ستاره در ابعاد مختلف میدان دید در روش N ستاره روشن‌تر



شکل ۱۸- میانگین و بیشینه زمان شناسایی برای پنج ستاره در ابعاد مختلف میدان دید در روش N ستاره روشن‌تر

از نمودارها می‌توان دریافت، اگرچه میانگین زمان شناسایی در روش‌های مختلف از نظر مقداری به یکدیگر نزدیک است اما بیشینه زمان شناسایی در روش پیشنهادی حفظ ستاره اولیه در تمامی تعداد ستاره‌ها

مراجع

- Increase Search Speed," *Space Science and Technology*, vol.4, no.4, pp. 83-92, 2012.
- [14] J. N. Juang, H.-Y. Kim, and J. L. Junkins, "An efficient and robust singular value method for star pattern recognition and attitude determination," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 52, pp. 211-220, 2004, <https://doi.org/10.1007/BF03546429>.
- [15] Sun Fei, and Xinhong Li, "Star Chart Recognition Algorithm Based on Singular Value Decomposition," In *2021 IEEE 5th Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC)*, vol. 5, pp. 124-129. IEEE, 2021, <https://doi.org/10.1109/IAEAC50856.2021.9391032>.
- [16] J. N. Juang, and Y.-C. Wang, "Further studies on singular value method for star pattern recognition and attitude determination," *The Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 59, pp. 370-380, 2012, doi: 10.1007/s40295-013-0023-4.
- [17] H. Yin, X. Song, and Y. Yan, "Robustness analysis and improvement of singular value decomposition algorithm for autonomous star identification," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol.229, no. 10, pp.1757-1770, 2015, <https://doi.org/10.1177/0954410014560181>.
- [18] M. Liu, X. Wei, D. Wen, and H. Wang, "Star identification based on multilayer voting algorithm for star sensors," *Sensors*, vol. 21, no. 9, p. 3084, 2021, <https://doi.org/10.3390/s21093084>.
- [19] K. Kim, and H. Bang, "Algorithm with patterned singular value approach for highly reliable autonomous star identification," *Sensors*, vol.20, no. 2, pp.374, 2020, <https://doi.org/10.3390/s20020374>.
- [20] L. Wu, Q. Xu, J. Heikkilä, Z. Zhao, L. Liu, and Y. Niu, "A star sensor on-orbit calibration method based on singular value decomposition," *Sensors*, vol. 19, no. 15, p. 3301, 2019, <https://doi.org/10.3390/s19153301>.
- [21] H. Johnston, C.Leake, M.M. de Almeida, and D.Mortari, "Recursive Star-Identification Algorithm Using an Adaptive Singular-Value-Decomposition-Based Angular-Velocity Estimator," *Journal of Spacecraft and Rockets* vol.58, no. 4, pp.1138-1148, 2021, <https://doi.org/10.2514/1.A34869>.
- [22] N. Muller, L. Magaia, and B.M.Herbst, "Singular value decomposition, eigenfaces, and 3D reconstructions," *SIAM review*, vol.46 no. 3, pp.518-545, 2004, <https://doi.org/10.1137/S0036144501387517>.
- [23] J. Shen, "On the singular values of Gaussian random matrices," *Linear Algebra and its Applications*, vol.326, no. (1-3), pp.1-14, 2001, [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(00\)00322-0](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00322-0).
- [24] H.B. Liu, and et al, "Angular velocity estimation from measurement vectors of star tracker," *Applied optics*, vol.51, no. 16, pp. 3590-3598, 2012, <https://doi.org/10.1364/AO.51.003590>.
- [1] A. Saeidi, N. Rahbar, and M. A. Alirezapouri, "Using The qEKF Algorithm for Satellite Attitude Estimation with Two Magnetometer & Sun Sensors," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 14, no. 3, pp. 65-73, 2021. doi:10.22034/jsst.2021.1128.
- [2] M. Shamirzaei, and M.Mirshams, "Inertial navigation position error estimation, using vision system," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 14, no. 3, pp. 75-90, 2021, doi: 10.22034/jsst.2020.1270.
- [3] M. Ebrahimi Kachoie, M. Arbabmir, and M. Norouz, "A Survey on Vision Navigation Methods for UAV Navigation Applications," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 10, no. 2, pp. 33-52, 2017.
- [4] G. Zhang, "Star Identification: Methods, Techniques and Algorithms," Springer, 2016.
- [5] M. Zahednamazi, A. Toloei, and R. Ghasemi, "Simulation of database search algorithms towards star-identification speed enhancement," *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, vol. 11, no. 1, pp. 115-130, 2022.
- [6] B.B. Spratling IV, and D.Mortari, "A survey on star identification algorithms," *Algorithms*, vol.2, no.1, pp.93-107, 2009, <https://doi.org/10.3390/a2010093>.
- [7] A. Toloei, M. Zahednamazi, R. Ghasemi, and F.Mohammadi, "A comparative analysis of star identification algorithms", *Astrophysics and Space Science*, vol.365, no.4, pp.1-9, 2020, <https://doi.org/10.1007/s10509-020-03775-9>.
- [8] M. Zahednamazi, A. Toloei, and R. Ghasemi, "Different types of star identification algorithms for satellite attitude determination using star sensor." *Aerospace Systems*, vol. 4, no. 4, pp. 315-321, 2021, <https://doi.org/10.1007/s42401-021-00093-y>.
- [9] A. Toloei, M.S. Arani, and M. Abaszadeh, "A new composite algorithm for identifying the stars in the star tracker," *International Journal of Computer Applications*, vol.102, no.2, 2014.
- [10] M.S. Arani, A. Toloei, and Z. Eghbaleh, "A geometric star identification algorithm based on triple triangle pattern," *7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*, IEEE, pp. 81-85, 2015, doi: 10.1109/RAST.2015.7208320.
- [11] Cole, C.L. and Crassidis, J.L., "Fast star-pattern recognition using planar triangles," *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 29, no. 1, pp. 64-71, 2006, <https://doi.org/10.2514/1.13314>.
- [12] D. Mortari, M.A. Samaan, C. Bruccoleri, and J.L. Junkins, "The pyramid star identification technique," *Navigation*, vol. 51, no. 3, pp. 171-183, 2004, <https://doi.org/10.1002/j.2161-4296.2004.tb00349.x>.
- [13] H. Sedaghat, A. Toloei, and H. Ghanbarpour, "Automatic Star Identification Using Triangle Base and